RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN MISMO ÁNGULO

Identidad fundamental.

Si en cualquiera de los cuatro cuadrantes, se traza la perpendicular al eje de abscisas desde el punto de intersección del lado móvil del ángulo con la circunferencia trigonométrica, quedan determinados triángulos rectángulos (ver figura 1) . con las intersecciones de los lados libres de ángulos, determinados en cualquiera de los cuatro cuadrantes, con la circunferencia trigonométrica y determinamos triángulos rectángulos

En estos triángulos rectángulos, el cateto indicado por x, representa el coseno, el cateto indicado por y, representa el seno.

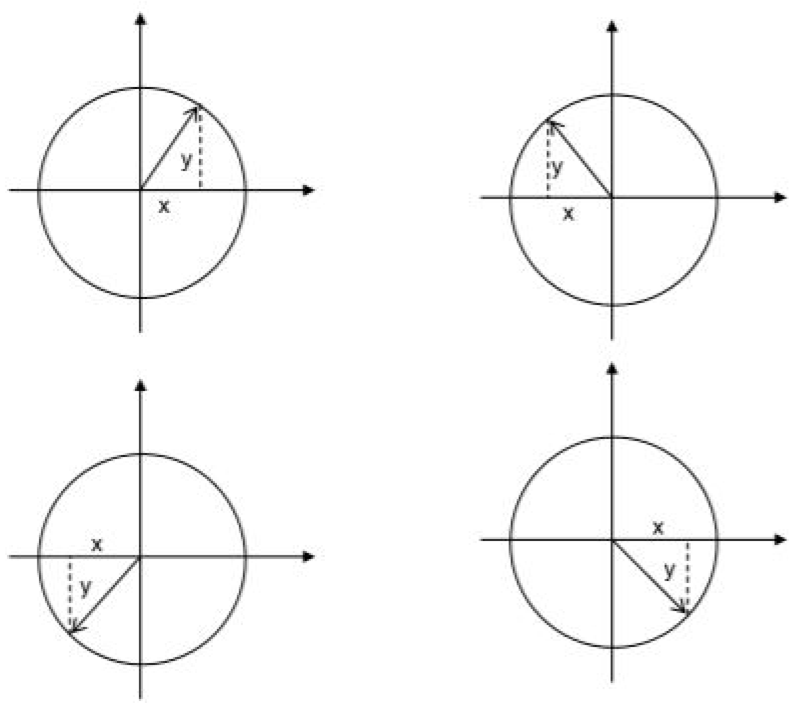

fig.1

Sabemos por el teorema de Pitágoras, que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, y siendo el valor de la hipotenusa igual a uno (ya que el radio es igual a uno)

$x^2 + y^2 = 1^2$

pero x representa al coseno e y al seno del ángulo , entonces

$$sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1$$

Esta expresión se llama **IDENTIDAD FUNDAMENTAL TRIGONOMÉTRICA.**

Relaciones derivadas

A partir de la identidad fundamental se deducen otras relaciones, cuyo conocimiento nos permite resolver distintas situaciones.

- De la relación fundamental deducimos despejando que:

$$sen\propto = \sqrt[2]{1 - cos^2 \propto}$$

$$cos\propto = \sqrt[2]{1 - sen^2 \propto}$$

- Recordando la definición de tangente tenemos:

$$tg\propto = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{y}{x} = \frac{sen \propto}{cos\propto}$$

$$tg\propto = \frac{sen \propto}{cos\propto}$$

- Recordando la definición de cotangente tenemos:

$$tg\propto = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{x}{y} = \frac{cos \propto}{sen\propto}$$

$$tg\propto = \frac{cos \propto}{sen\propto}$$

- Recordando la definición de cosecante tenemos:

$$cosec\propto = \frac{hipotenuesa}{cateto\ opuesto} = \frac{1}{y} = \frac{1}{sen\propto}$$

$$cosec\propto = \frac{1}{sen\propto}$$

- Recordando la definición de secante tenemos:

$$sec\propto = \frac{hipotenuesa}{cateto\ adyacente} = \frac{1}{x} = \frac{1}{cos\propto}$$

$$sec\propto = \frac{1}{cos\propto}$$

- Si dividimos miembro a miembro la identidad fundamental por $cos^2 \propto$ tenemos

$$\frac{sen^2 \propto}{cos^2\propto} + \frac{cos^2\propto}{cos^2\propto} = \frac{1}{cos^2\propto}$$

$$tg^2 \propto + 1 = sec^2 \propto$$

- Si dividimos miembro a miembro la identidad fundamental por $sen^2 \propto$ tenemos

$$\frac{sen^2 \propto}{sen^2\propto} + \frac{cos^2\propto}{sen^2\propto} = \frac{1}{sen^2\propto}$$

$$1 + cotg^2 \propto = cosec^2$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Recordemos que identidad es una igualdad que se verifica para cualquier valor asignado a la/s variable/s , Entonces diremos que una identidad trigonométrica es una igualdad establecida entre expresiones trigonométricas ue se verifica para cualquier valor asignado a la variable independiente, en este caso , la amplitud de un ángulo (siempre que este valor no anule los denominadores).

Verificar una identidad significa transformar los miembros de tal manera ue en ellos uede la mism a expresión. Esto se realiza utilizando las relaciones trigonométricas antes vistas, además de los algoritmos de las operaciones ya estudiadas.

Para verificar identidades solo necesitaremos tener práctica y ejercitarnos a fin de que, cada vez nos sea más sencillo llegar a los resultados buscados.

Ejemplos

a. $cos^2 \propto = sen^2 \propto . (cosec^2 \propto - 1)$ elegimos el 2do miembro para transformar

$cos^2 \propto = sen^2 \propto . \left(cotg^2 \propto\right)$

$cos^2 \propto = sen^2 \propto . \frac{cos^2 \propto}{sen^2 \propto}$ simplificando $sen^2 \propto$ tenemos

$cos^2 \propto = cos^2 \propto$

b. $tg \propto + cotg \propto = sec \propto .cosec \propto$ si se elige el primer miembro

$\frac{sen \propto}{\cos cos \propto} + \frac{cos \propto}{sen \propto} = sec \propto .cosec \propto$ sumando las fracciones del 1er miembro

$\frac{sen^2 \propto + cos^2 \propto}{cos \propto .sen \propto} = sec \propto .cosec \propto$

$\frac{1}{cos \propto .sen \propto} = sec \propto .cosec \propto$ distribuyendo el 1er miembro

$\frac{1}{cos \propto} . \frac{1}{sen \propto} = sec \propto .cosec \propto$

$sec \propto .cosec \propto = sec.cosec \propto$