

TRIGONOMETRÍA

Generación de Ángulos

Definición de Ángulos: En trigonometría, ángulo es la figura que se genera por la rotación de una semirrecta alrededor de su extremo, desde una posición inicial hasta una posición final. Es decir la semirrecta con extremo en "O" y que pasa por R gira alrededor de "O", desde su posición inicial hasta una posición final, generando el ángulo $\widehat{RÔS}$.

La amplitud de la rotación es la medida del ángulo.

La posición inicial se llama **lado inicial** del ángulo; la posición final se llama **lado terminal** y el extremo de la semirrecta vértice del ángulo.

Signos de los Ángulos

Al lado inicial lo podemos hacer girar en dos sentidos opuestos. De los dos sentidos uno se elige como positivo y el otro como **negativo**.

Aunque la elección es puramente convencional, es costumbre generalizada la de adoptar como **sentido positivo**, el que es contrario al movimiento de las agujas del reloj (sentido antihorario), y como **sentido negativo** si el lado gira en el sentido al del movimiento de las agujas del reloj (sentido horario).

El sentido de la rotación se indica mediante una flecha sobre una línea curva.

Ángulo Positivo

Ángulo Negativo

Un ángulo **dirigido u orientado** es aquel al cual se ha asignado un sentido.

Notación de ángulos

Los ángulos pueden designarse por medio de letras griegas tales como: $\alpha, \beta, \delta \dots$

Por medio de tres letras \widehat{ABC} , ó $\widehat{RÔS}$,...; y también por el nombre del vértice del ángulo: $\hat{A}, \hat{P}, \hat{O}$.

Ángulo de un giro: Es aquel obtenido cuando una semirrecta efectúa un giro de forma tal que retorna a su posición de origen.

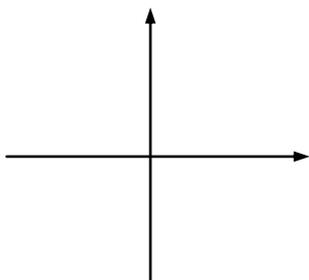
Nota: En trigonometría, el ángulo no tiene ese carácter restringido que la geometría le impone, a condición de ser menor que cuatro rectos; por el contrario puede tener un valor infinitamente

grande, que depende del número de giros que haya descrito la semirrecta que lo genera, pudiendo además ser positivo o negativo.

Ángulo Central: Es el ángulo cuyo vértice está en el centro de una circunferencia.

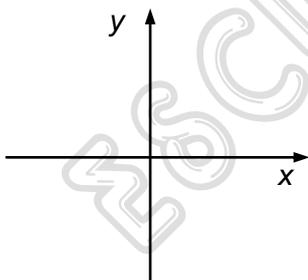
Posición Normal de un ángulo

Consideramos un sistema de ejes coordenados cartesianos ortogonales de centro en O. Se dice que un ángulo está en posición normal si su vértice está en el origen de coordenadas y su lado inicial coincide con el semieje positivo X. Si el lado terminal está en el segundo cuadrante, el ángulo se denomina ángulo del cuadrante y análogamente para los otros cuadrantes.

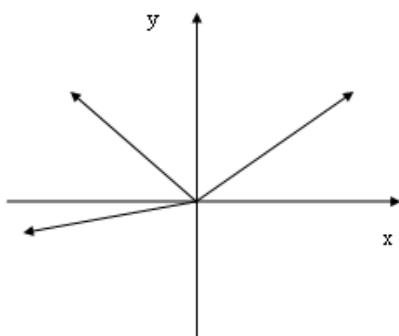


Ángulo cuadrantal: es aquel ángulo en posición normal cuyo lado terminal coincide con alguno de los semiejes del sistema coordenado cartesiano. Son ángulos cuadrantales los que miden: 0°. 90°; 180°; 270° y 360°. (Estos ángulos no pertenecen a ningún cuadrante).

Observación: Los ejes X, Y, dividen al plano en cuatro regiones: I primer cuadrante, II segundo cuadrante, III tercer cuadrante, IV cuarto cuadrante.

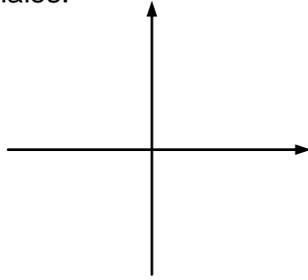


 **Actividad:** Completa



- $\hat{\alpha} \in \dots\dots\dots$
- $\hat{\delta} \in \dots\dots\dots$
- $\hat{\theta} \in \dots\dots\dots$
- $\hat{\omega} \in \dots\dots\dots$

Ángulos Coterminales: Dos ángulos que están en posición estándar son coterminales o cofinales si tienen el mismo lado final y el mismo lado inicial. Por ejemplo 30° , -330° y 390° son todos coterminales.



Para encontrar un ángulo coterminal positivo y uno negativo con un ángulo dado, se puede sumar y restar 360° , si el ángulo es medido en grados, o 2π si el ángulo es medido en radianes.

 Halla un ángulo coterminal positivo y uno negativo con un ángulo de 55° . Grafica.

 Encuentra un ángulo coterminal positivo y uno negativo con un ángulo de $\frac{\pi}{3}$

Sistemas de medición de ángulos: Los sistemas más usados son tres:

Sistema Sexagesimal (DEG)

En este sistema el grado de medida es el grado sexagesimal (1°) y se obtiene dividiendo la medida de un ángulo de un giro en 360 partes iguales.

$$1^\circ \text{ grado sexagesimal} = \frac{\text{un ángulo de 1 giro}}{360} = 1^\circ$$

Es decir que en el sistema sexagesimal un ángulo de un giro mide 360° .

$$1 \text{ giro} = \text{-----} \quad \frac{1}{2} \text{ giro} = \text{-----} \quad \frac{1}{4} \text{ giro} = \text{-----}$$

Si a un ángulo de 1° se lo divide en 60 partes iguales, se obtiene un ángulo de un minuto ($1'$)

$$1' = \frac{1^\circ}{60} \quad \text{o bien} \quad 1^\circ = 60'$$

Si a un ángulo de $1'$ se lo divide en 60 partes iguales, se obtiene un ángulo de un segundo ($1''$)

$$1'' = \frac{1'}{60} \quad \text{o bien} \quad 1' = 60'' \quad , \text{ también se cumple: } 1'' = \frac{1^\circ}{3600} \quad \text{o bien} \quad 1^\circ = 3600''$$

Sistema Centesimal (GRAD)

La unidad de medida es el grado centesimal (1^G), se obtiene dividiendo la medida de un ángulo de un giro en 400 partes iguales.

$1^G = 1$ grado centesimal $= \frac{1 \text{ giro}}{400}$, luego podemos decir:

$$1 \text{ giro} = \dots\dots\dots \quad \frac{1}{2} \text{ giro} = \dots\dots\dots \quad \frac{1}{4} \text{ giro} = \dots\dots\dots$$

Submúltiplos:

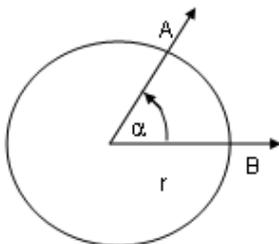
$$1^M = 1 \text{ minuto centesimal} = \frac{1^G}{100} \quad \text{ó bien} \quad 1^G = \dots\dots\dots^M$$

$$1^S = 1 \text{ segundo centesimal} = \frac{1^M}{100} \quad \text{ó bien} \quad 1^M = \dots\dots\dots^S \Rightarrow 1^G = \dots\dots\dots^S$$

Sistema Circular o Radial (RAD)

El sistema radial fue introducido en los comienzos del siglo pasado, siendo su unidad de medida el radián (1 radian o bien 1, r).

Se llama radian a la medida de un ángulo central que corresponde a un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma.



Si la longitud del arco AB es igual al radio r, de la circunferencia, entonces el ángulo α mide 1 radian.

¿Cuántos radianes miden un ángulo de un giro? Para responder a esta pregunta realizamos el siguiente planteo:

La medida del arco correspondiente a un ángulo de 1 giro es igual a la longitud de la circunferencia, es decir igual a $2\pi \cdot r$. Luego:

1 arco de long r ___ 1 radian	$x = \frac{2\pi \cdot r \cdot 1 \text{ radian}}{r}$	$x = \dots\dots\dots$
1 arco de long $2\pi \cdot r$ ___ x radian		

Es decir que un ángulo de un giro mide....., o sea $360^\circ = \dots\dots\dots$

Luego un radian en grados sexagesimales:

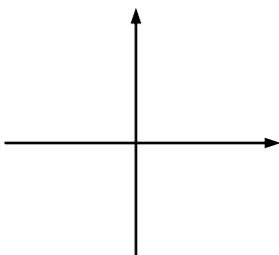
1 radian =

Equivalencia entre unidades

	Sexagesimal	Circular	Centesimal
1 giro			
1 llano			
1 recto			

Longitud de arco

En una circunferencia de radio r , el ángulo central de α radianes determina un arco de longitud: $L = r \cdot \alpha$ (radio por ángulo central en radianes).

**Pasaje entre los distintos sistemas de medidas**

Se resuelve en todos los casos aplicando regla de tres simple.

- **Pasaje del sistema sexagesimal al sistema radial:** (expresa en fracción)

$$\hat{\alpha} = 105^\circ$$

- **Pasaje del sistema radial al sistema sexagesimal:**

$$\hat{\beta} = 5 \pi \text{rad}$$

NOTA:

✓ Para convertir un número decimal en grados, minutos y segundos sexagesimales, las calculadoras científicas lo hacen con la tecla o con , según el modelo de máquina.

Por ejemplo $10,5^\circ = 10^\circ 30'$

✓ Para convertir un número decimal en grados, minutos y segundos centesimales, basta con organizar los decimales y leerlos de a dos de la siguiente manera:
Por ejemplo $20,8526745 = 20^{\circ} 85^{\text{M}} 26,745^{\text{S}}$

- ✓ Siempre que se pueda, se debe dejar el resultado en radianes, como una fracción del ángulo llano. Por ejemplo $120^{\circ} = \frac{2}{3} \pi \text{ rad}$ (valores simplificados)

 **Actividad:**

1) Expresar los siguientes ángulos en el sistema circular.

- a) 36° b) 45° c) $24^{\circ}15'45''$ d) $55^{\circ}14'$

2) Expresar los siguientes ángulos en el sistema sexagesimal.

- a) 7 rad b) $\frac{2}{5} \pi \text{ rad}$ c) $\frac{7}{8} \pi \text{ rad}$ d) $\frac{3}{4} \pi \text{ rad}$

3) a) ¿Cuántos grados son $12^{\circ} 48' 30''$? (habrá que pasar todo a grados)

b) Escribe en forma compleja $265,63^{\circ}$

4) Un caballo, amarrado por medio de una cuerda a una estaca, se mueve manteniendo la cuerda tensa. Si, al cabo de recorrer 52,36m la cuerda ha descrito un ángulo de 75° , ¿qué longitud tiene la cuerda?

5) ¿Qué longitud tiene un arco de circunferencia de radio 5m, si el arco mide $10^{\circ} 48'$?

6) Calcular la longitud de un arco correspondiente a un ángulo de 80° en una circunferencia de 18m de radio.

7) En un sector circular el ángulo mide 30° y el radio mide 12 cm ¿cuánto mide el arco?

8) En un sector circular, el ángulo central mide 36° y el arco correspondiente mide $6\pi \text{ m}$ ¿Cuál es la longitud de dicho sector?

9) El péndulo de un reloj mide 75 cm y al balancearse se desplaza 12° a cada lado de la vertical, ¿Cuál es la longitud del arco que describe?