TRIGONOMETRÍA

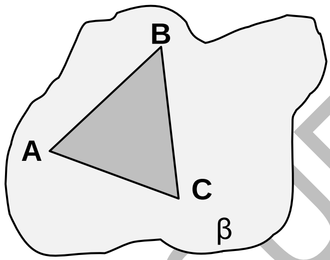
Reseña Histórica

La historia de la trigonometría se remonta a la primera matemática conocida en Egipto y Babilonia. Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Sin embargo, hasta los tiempos de la Grecia clásica no empezó a haber trigonometría en la matemática. En el sigo II a.C. el astrónomo Hiparco de Nicea compiló una tabla trigonometría para resolver triángulos, al que se lo considera el padre de la trigonometría. Tolomeo (siglo II, d.C.) publicó en el primer libro de su "Almagesto", una tabla de funciones trigonométricas para ser usada en los cálculos astronómicos.

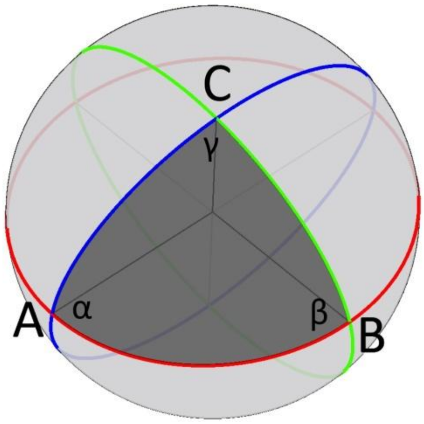
Definición: Trigonometría, rama de la matemática que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Etimológicamente significa "medidas de triángulos", es decir la trigonometría *estudia la resolución de triángulos*. (Resolver un triángulo implica hallar sus tres lados y sus tres ángulos conociendo algunos de ellos).

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en los que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, es decir, una distancia que no podía ser medida de forma directa, como la distancia entre la Tierra y la Luna. Se encuentran notables aplicaciones de las funciones trigonométricas en la física y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el flujo de corriente alterna.
Las dos ramas principales de la trigonometría son la trigonometría plana y la trigonometría esférica.

Trigonometría Plana: Se ocupa fundamentalmente de la resolución de triángulos planos. Para ello, se definen las razones trigonométricas de los ángulos y se estudian las relaciones entre ellas.



Trigonometría Esférica: La trigonometría esférica se usa sobre todo en navegación, astronomía y geodesia. Estudia triángulos esféricos, es decir, figuras formadas por arcos de circunferencias máximas contenidos en la superficie de una esfera.



Funciones Trigonométricas

Toda función que depende de un ángulo, es decir, cuya variable independiente es un ángulo, se llama función goniométrica del griego: *gonon* (ángulo) y *metrein* (medida).
Las funciones trigonométricas pueden expresarse mediante razones entre el radio vector, la ordenada y la abscisa.

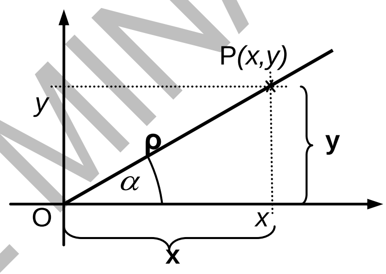
Sea α un ángulo cualquiera colocado en posición normal y sea *P(x,y)* un punto cualqueira, distinto del origen perteneciente al lado terminal del ángulo. Vamos a definir lo que llamaremos “*funciones trigonométricas del ángulo* α ”.

Dichas *funciones trigonométricas* (o circulares) son seis y se denominan: *seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante* y *cosecante.*

Una función trigonométrica de un ángulo es un número que puede ser positivo, negativo o cero y su valor dependerá de la medida del ángulo.

Dado en el plano un sistema de coordenadas cartesianas perpendiculares consideremos un ángulo α , en el lado libre del ángulo un punto **P**, de coordenadas **(x , y)**.

Luego tenemos:
El ángulo α
Punto P de coordenadas *(x;y)*
Radio vector (ro o rho) : **ρ** (distancia de O a P)



(Recordemos: **y** es para ordenada, **x** para abscisas)

Mediante cocientes entre estos tres segmentos quedan definidas seis funciones que dependen del ángulo y se llaman **funciones trigonométricas**.

Las funciones trigonométricas son:

- **Seno de un ángulo (S.O.R.)**

El seno de un ángulo es el cociente entre la ordenada y el radio vector correspondiente.

$$sen\,\alpha = \frac{ordenada}{radio\ vector} = \frac{y}{\rho}$$

- **Coseno de un ángulo (C.A.R.)**

El coseno de un ángulo es el cociente entre la abscisa y el radio vector.

$$\cos\alpha = \frac{abscisa}{radio\ vector} = \frac{x}{\rho}$$

- **Tangente de un ángulo (T.O.A.)**

La tangente de un ángulo es el cociente entre la ordenada y la abscisa.

$$tg\,\alpha = \frac{ordenada}{abscisa} = \frac{y}{x}$$

- **Cotangente de un ángulo**

La cotangente de un ángulo es el cociente entre la abscisa y la ordenada.

$$cotg\ \alpha = \frac{abscisa}{ordenada} = \frac{x}{y}$$

- **Secante de un ángulo**

La secante de un ángulo es el cociente entre el radio vector y la abscisa.

$$sec\,\alpha = \frac{radio\ \ vector}{abscisa} = \frac{\rho}{x}$$

- **Cosecante de un ángulo**

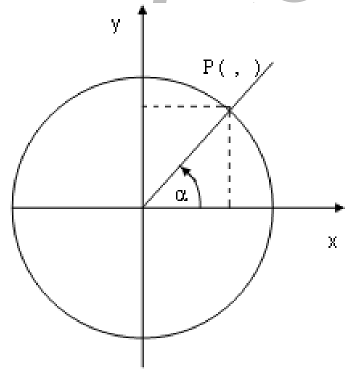
La cosecante de un ángulo es el cociente entre el radio vector y la ordenada.

$$cosec\,\alpha = \frac{radio\ \ vector}{ordenada} = \frac{\rho}{y}$$

Nota: si tomamos otro punto distinto al P sobre la misma semirrecta, los valores del radio, abscisa y ordenada varían, pero no el ángulo. Podemos decir así que los valores de las funciones trigonométricas son iguales más allá que los valores citados sean distintos.

Por tanto, las razones trigonométricas de un ángulo dependen única y exclusivamente del ángulo, independientemente del punto (es decir, del radio) que consideremos en el lado.

✎ **Actividad: a)** Según los datos calcular el valor de las seis funciones trigonométricas.



$$\rho = 5$$
$$y = 4$$
$$x = 3$$

$sen\,\alpha = \text{——} = \text{——}$ $\qquad cos\,\alpha = \text{——} = \text{——}$ $\qquad tg\,\alpha = \text{——} = \text{——}$

$cosec\,\alpha = \text{——} = \text{——}$ $\qquad sec\,\alpha = \text{——} = \text{——}$ $\qquad cotg\ \alpha = \text{——} = \text{——}$

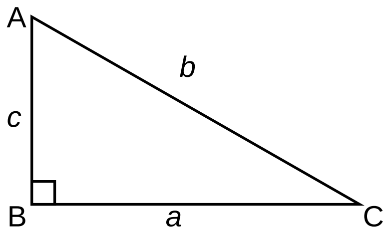
b) Considera el ángulo 218º 53' 29''. Indica el signo de cada una de sus razones trigonométricas.

c) Dado el punto del plano A(5, 3), queremos hallar las razones trigonométricas del ángulo de vértice el origen O y lados el semieje positivo de abscisas y la semirrecta de origen O que pasa por el punto A.

<u>Funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo</u>

La trigonometría relaciona las medidas angulares de los triángulos rectángulos con las longitudes de sus lados. Primero, recuerda que los triángulos que tienen las mismas medidas angulares son semejantes, y por lo tanto las razones de sus lados correspondientes son iguales. Los triángulos rectángulos tienen nombres especiales para las razones, que son las mismas que vimos anteriormente: *seno*, *coseno*, *tangente* y sus recíprocas: *cosecante, secante y cotangente.*

Para establecer las razones trigonométricas, en cualquier triángulo rectángulo, es necesario conocer sus elementos. Para ello, veamos la figura:



Los ángulos con vértice en **A** y **C** son agudos, el ángulo con vértice en **B** es recto.

Los lados los indicaremos con una letra minúscula correspondiente al ángulo opuesto.

Este triángulo se caracteriza por que los lados de los ángulos agudos son la hipotenusa y un cateto, y los lados del ángulo recto son los catetos.

Cada uno de los ángulos agudos del triángulo, uno de cuyos lados es la hipotenusa, se relaciona con los catetos, que pueden ser **cateto opuesto al ángulo** o **cateto adyacente al ángulo**, según corresponda.

Cateto adyacente es aquel que forma parte del ángulo al cual se hace referencia.

Cateto opuesto es el lado que no forma parte del ángulo que se toma como referencia y se encuentra enfrente de este.

<u>Por ejemplo</u>: establecemos las funciones trigonométricas para el ángulo A de la figura anterior:

$$Sen\ A = \frac{\qquad\qquad\qquad}{} = \frac{\quad}{} \qquad\qquad Cosec\ A = \frac{\qquad\qquad\qquad}{} = \frac{\quad}{}$$

$$Cos\ A = \frac{\qquad\qquad\qquad}{} = \frac{\quad}{} \qquad\qquad Sec\ A = \frac{\qquad\qquad\qquad}{} = \frac{\quad}{}$$

$$TgA = \frac{\qquad\qquad\qquad}{} = \frac{\quad}{} \qquad\qquad Cotg\ A = \frac{\qquad\qquad\qquad}{} = \frac{\quad}{}$$

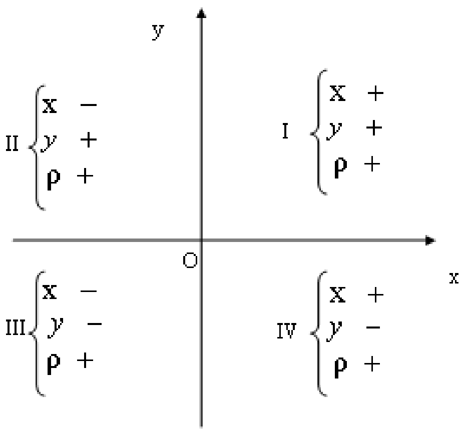
✎ Escribe las funciones trigonométricas para el ángulo B

Signos de las funciones trigonométricas en los cuatros cuadrantes

De acuerdo a la convención adoptada se establece que:

- El radio vector se considera siempre positivo.
- La abscisa y la ordenada se consideran positivas o negativas según al cuadrante al que pertenezca el ángulo. Por lo tanto los signos de la abscisa y de la ordena coinciden en cada cuadrante con los signos de las coordenadas cartesianas ortogonales correspondientes.

Las convenciones referentes a los signos de la abscisa, la ordenada y el radio vector se resumen en el siguiente gráfico:



✐ **Actividad** Indica en el siguiente cuadro, el signo de las funciones trigonométricas según el cuadrante al que pertenece el ángulo α .

	I	II	III	IV
sen α				
cos α				
tg α				
cotg α				
sec α				
cosec α				

Resolución de triángulos rectángulos

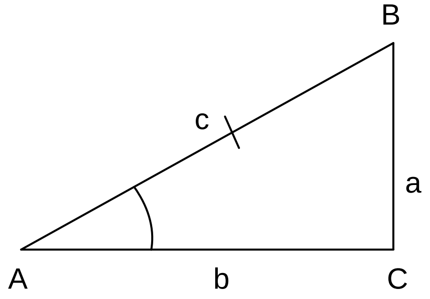
Resolver un triángulo significa encontrar las medidas de los tres lados y de los tres ángulos (en algunos casos también se halla la superficie).

Para resolver un triángulo rectángulo necesitamos conocer un ángulo agudo y un lado o bien dos lados.

Debemos tener presente el Teorema de Pitágoras (como también su recíproco) y recordar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 180º, y que dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus amplitudes es igual a 90º.

Casos de Resolución:

1) Dada la hipotenusa y un ángulo agudo



Datos

$c = 30\ \text{cm}$

$\hat{A} = 60^\circ$

Incógnita

$\hat{B}, a, b, \text{Superficie}$

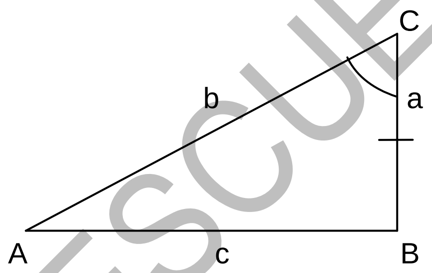
Cálculo de $\hat{B}$

Cálculo de "a"

Cálculo de "b"

Cálculo de Sup.

2) Dado un cateto y un ángulo agudo



Datos

$a = 6\text{cm}$

$\hat{C} = 58^\circ$

Incógnita

$\hat{A}, b, c, \text{Superficie}$

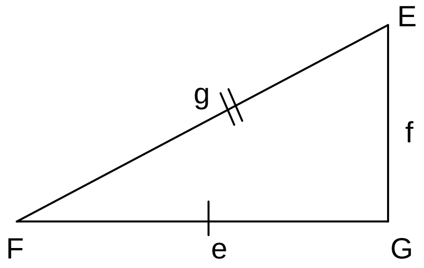
Cálculo de $\hat{A}$

Cálculo de "b"

Cálculo de "c"

Cálculo de Sup.

3) Dada la hipotenusa y un cateto



Datos

$g = 15\,cm$

$e = 9\,cm$

Incógnita

$\hat{E}, \hat{F}, f$, Superficie

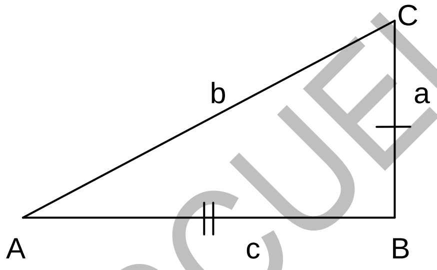
Cálculo de $\hat{E}$

Cálculo de $\hat{F}$

Cálculo de "f"

Cálculo de Sup.

4) Dados los dos catetos



Datos

$a = 3{,}5\,cm$

$c = 5\,cm$

Incógnita

$\hat{A}, \hat{C}, b$, Superficie

Cálculo de "b"

Cálculo de $\hat{A}$

Cálculo de $\hat{C}$

Cálculo de Sup.

ACTIVIDAD: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1) Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4,8 cm y el ángulo opuesto a este cateto mide 54°. Halla la medida del resto de los lados y de los ángulos del triángulo.

2) Los lados de un paralelogramo miden 12 y 20 cm, respectivamente, y forman un ángulo de 60°. ¿Cuánto mide la altura del paralelogramo? ¿Y su área?

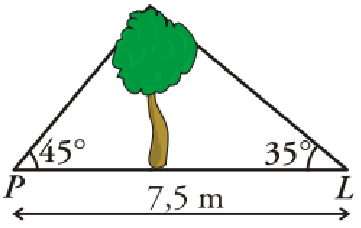
3) En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 cm y uno de los catetos mide 12 cm. Calcula la longitud del otro cateto y la medida de sus ángulos.

4) Las diagonales de un rombo miden 10 y 14 cm, respectivamente. Calcula el lado del rombo y sus ángulos.

5) Queremos fijar un poste de 3,5 m de altura, con un cable que va desde el extremo superior del poste al suelo. Desde ese punto del suelo se ve el poste bajo un ángulo de 40°. ¿A qué distancia del poste sujetaremos el cable? ¿Cuál es la longitud del cable?

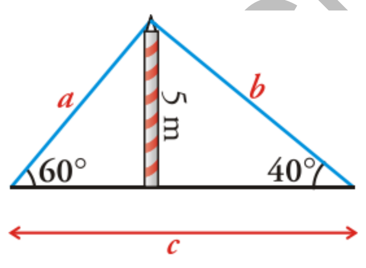
6) Para medir la altura de una torre nos situamos en un punto del suelo y vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de 60°. Nos acercamos 5 metros a la torre en línea recta y el ángulo es de 80°. Halla la altura de la torre.

7) Pablo y Luis están situados cada uno a un lado de un árbol, como indica la figura:



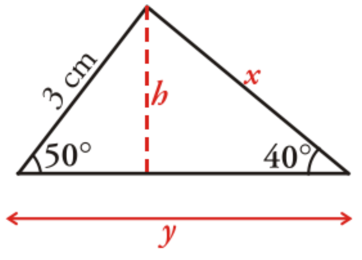
a) Calcula la altura del árbol.
b) ¿A qué distancia está Pablo del árbol?

8) Un mástil de 5 metros se ha sujetado al suelo con un cable como muestra la figura:



Halla el valor de c y la longitud del cable.

9) Halla los valores de x, y, h en el siguiente triángulo:



10) Desde el suelo vemos el punto más alto de un edificio con un ángulo de 60°. Nos alejamos 6 metros en línea recta y este ángulo es de 50°.¿Cuál es la altura del edificio?

Estimados alumnos de

1er año CS Química e Informática:

Ante todo saludarlos a la espera que se encuentren todos bien al igual que sus familias.

El material teórico y la actividad que se envía corresponden a la Introducción a la trigonometría, razones trigonométricas y resolución de triángulos rectángulos.

Si es necesario pueden usar material bibliográfico, como también algunos videos. Para ello les dejo algunos links.

Saludos cordiales, Prof. Ruiz

https://www.youtube.com/watch?v=FUMlQtJfrHo&list=PLeySRPnY35dEAIFYvOhtD2cztVuq15qw1

https://www.youtube.com/watch?v=W4DpA-puWgw&list=PLeySRPnY35dEAIFYvOhtD2cztVuq15qw1&index=2

https://www.youtube.com/watch?v=Eh2SXkZR9BY&list=PLeySRPnY35dEAIFYvOhtD2cztVuq15qw1&index=3

https://www.youtube.com/watch?v=Qx8n_-Te-wk&list=PLeySRPnY35dEAIFYvOhtD2cztVuq15qw1&index=4

https://www.youtube.com/watch?v=4mpKZMrFauw&list=PLeySRPnY35dEAIFYvOhtD2cztVuq15qw1&index=5 (importante)

https://www.youtube.com/watch?v=dB24euc2-jE&list=PLeySRPnY35dEAIFYvOhtD2cztVuq15qw1&index=6

https://www.youtube.com/watch?v=Ylv3Eymolu4

https://www.youtube.com/watch?v=ZRLaVT8E3Zs&list=PLeySRPnY35dEAIFYvOhtD2cztVuq15qw1&index=9

https://www.youtube.com/watch?v=nGS1glnproM&list=PLeySRPnY35dEAIFYvOhtD2cztVuq15qw1&index=11

https://www.matematicasonline.es/pdf/ejercicios/Resolucion%20de%20triangulos%20rectangulos.pdf

https://www.youtube.com/watch?v=hxHZzSeqm5I

https://www.youtube.com/watch?v=HKPBF6AwlL4