

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Se llama *ecuación lineal o de primer grado* a una ecuación de la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

Donde, las incógnitas de la ecuación son: $x_1, x_2, \dots, x_n$ y en cada ecuación las incógnitas pueden tener el valor de cualquier número real.

Los coeficientes de las incógnitas son $a_1, a_2, \dots, a_n$ y en cada ecuación son números reales fijos.

El término independiente es el número b , y en cada ecuación es un número fijo.

La solución de la ecuación son los valores: $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$

Discutir una ecuación es averiguar si tiene o no soluciones.

Resolver una ecuación es encontrar las soluciones de la ecuación.

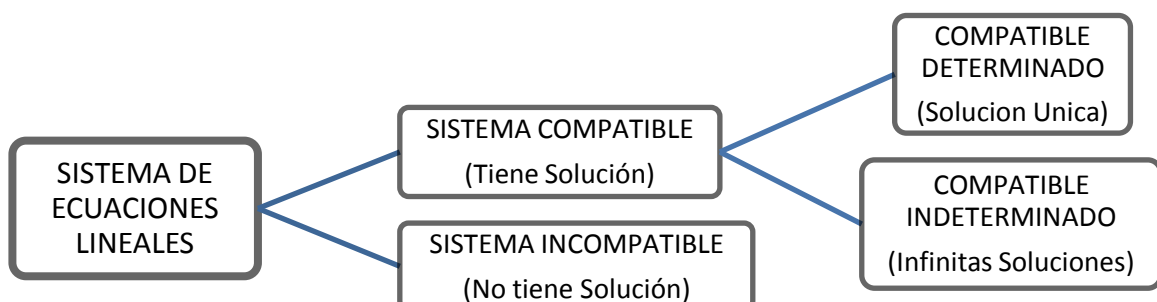
Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de varias ecuaciones lineales que se representa así:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

El anterior es un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, donde la llave indica que las ecuaciones deben tratarse de forma simultánea.

- los números a_{ij} se llaman *coeficientes del sistema*.
- los x_i se llaman *incógnitas* del sistema.
- y los números reales b_j se llaman *términos independientes*.

La solución del sistema es un conjunto ordenado de números reales $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tales que al sustituir las incógnitas por estos valores se verifican a la vez las m ecuaciones.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

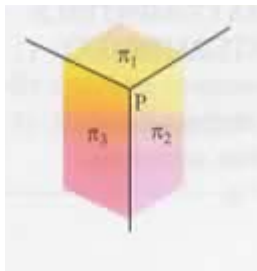
INTERPRETACION GEOMETRICA

Consideremos un sistema 3x3:
$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = b_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = b_2 \\ a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = b_3 \end{cases}$$

Si x, y, z son las coordenadas cartesianas de un punto en el espacio, entonces cada ecuación del sistema es la ecuación de un plano, siempre que los coeficientes no son simultáneamente nulos.

$P(x_0, y_0, z_0)$ es solución del sistema si verifica las tres ecuaciones, es decir, P pertenece a los tres planos.

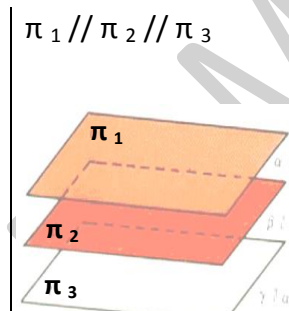
Podemos observar las tres posibilidades que se presentan a continuación:



$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}$$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

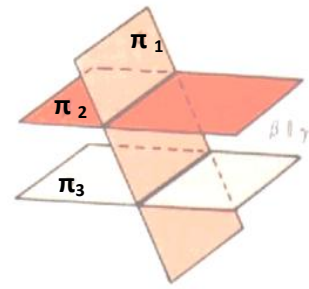
Admite una y solo una solución



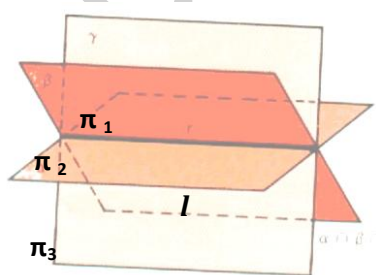
$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$$

SISTEMA INCOMPATIBLE

No tiene solución



$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$$



$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = l$$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

Admite infinitas soluciones

Actividad:

1) El sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 5z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ es compatible determinado.

Indicar cuáles de las siguientes son soluciones del sistema:

a) (0; -1; 1) b) (-1; 2; 0) c) (1; -3; 2)

2) Todo sistema homogéneo tiene al menos una solución.

Sin resolver el sistema, dar una solución que verifique $\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

SISTEMAS EQUIVALENTES

Dos sistemas se dicen equivalentes si tienen la misma solución general

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

Son equivalentes, ambos tienen la misma solución general:

$$S = \{(1; 1)\}$$

REGLA DE CRAMER

La Regla de Cramer es un método para resolver mediante uso de determinantes sistemas de ecuaciones cuadradas, es decir, que se tenga el mismo número de ecuaciones que incógnitas. El procedimiento es similar al utilizado en sistemas 2 x 2.

Se aplica a sistemas que cumplan las dos condiciones siguientes:

- El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.
- El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

Tales sistemas se denominan sistemas de Cramer.

El valor de cada incógnita se obtiene dividiendo por el determinante del sistema, el determinante que resulta de reemplazar la columna de los coeficientes de las incógnitas que estamos calculando por los términos independientes.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ -x + 2y + 4z = -3 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Hallamos el valor del determinante de los coeficientes $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 2 + 4 - (-2 - 16 + 3) = -10 + 15 = \boxed{5}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{matrix} \quad (\text{las dos primeras filas se disponen debajo})$$

Veremos que si el $|A| \neq 0 \Rightarrow$ el sistema dado "tiene solución" (compatible y es única, es decir, es determinado).

Los valores de las incógnitas se obtienen:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} \quad \text{Donde } |A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 6 + 16 - (-8 - 24 + 9) \\ = -8 + 23 \Rightarrow |A_1| = \boxed{15}$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{5} \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} \quad \text{Donde } |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 18 + 4 + 12 - (3 + 32 + 9) \\ = 34 - 44 \Rightarrow |A_2| = \boxed{-10}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-10}{5} \Rightarrow \boxed{y = -2}$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} \quad \text{Donde } |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 6 - 3 - (6 + 12 - 4) \\ = 19 - 14 \Rightarrow |A_3| = \boxed{5}$$

$$\Rightarrow z = \frac{5}{5} \quad \boxed{z = 1} \quad \text{La solución del sistema es } S(3, -2, 1)$$

Importante: Siempre hacer el análisis de compatibilidad primero. Luego resolver.

Resuelve aplicando la Regla de Cramer.

$$a) \begin{cases} 3x + 2y + z = -2 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 2y - 5z = 1 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ -2x + y - z = -2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - z = 7 \\ -2x + y = -7 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$$

Método de Sarrus

El **método de Sarrus** es de gran utilidad para calcular **determinantes de orden 3**.

Los términos con **signo +** están formados por los elementos de la **diagonal principal** y los de las **diagonales paralelas** con su correspondiente **vértice opuesto**.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Los términos con **signo -** están formados por los elementos de la **diagonal secundaria** y los de las **diagonales paralelas** con su correspondiente **vértice opuesto**.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 0 \cdot (-1) =$$

$$= 5 - 4 + 0 - 6 - 10 + 0 = -15$$

ACTIVIDAD: SISTEMAS DE 3X3 - EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Resuelve y verifica los siguientes sistemas y problemas:

$$1) \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

(Solución: $x=-4$, $y=6$, $z=1$)

$$2) \begin{cases} 5x - 3y - z = 1 \\ x + 4y - 6z = -1 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \end{cases}$$

(Solución: $x=1$, $y=1$, $z=1$)

$$3) \begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 4x + 3y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} a + b = -c + \frac{34}{15} \\ a - b - c = -\frac{16}{15} \\ 5a = -3b - c + 8 \end{cases}$$

5) Se quiere repartir 2800 \$ entre tres hermanos. Al mayor le corresponde el triple del segundo, y al segundo le corresponde el doble que al tercero ¿Cuánto dinero le corresponde a cada hermano?

6) Un cliente de supermercado ha pagado un total de 1560 \$ por 24 L de leche, 6 kg de jamón y 12 L de aceite. Calcular el precio de cada artículo, sabiendo que 1 L de aceite cuesta el triple que 1 L de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 L de aceite más 4 L de leche.

7) En una librería, un cliente se ha gastado 1500 \$ en la compra de 12 artículos entre lapiceras, cuadernos y carpetas. Cada lapicera le ha costado 200 \$, cada cuaderno 150 \$ y cada carpeta 50 \$. Se sabe que entre lapiceras y carpetas hay el triple que cuadernos. Determina cuántos artículos ha comprado de cada tipo.

8) Asisten a una fiesta 30 personas entre hombres, mujeres y niños. Se sabe que entre los hombres y las mujeres duplican al número de niños. También se sabe que entre los hombres y el triple de las mujeres exceden en 20 al doble de niños. Plantear un sistema de ecuaciones que permita averiguar el número de hombres, mujeres y niños.

9) Se dispone de un recipiente de 24 litros de capacidad y de tres medidas, A, B y C. Se sabe que el volumen de A es el doble del de B, que las tres medidas llenan el depósito y que las dos primeras lo llenan hasta la mitad. ¿Qué capacidad tiene cada medida?

10) En una granja se venden pollos, pavos y perdices a razón de 120, 90 y 240 \$ por cada kg, respectivamente. En cierta semana los ingresos totales de la granja ascendieron a 342000 \$. Además se sabe que la cantidad de pollo vendida superó en 100 Kg a la de pavo y que se vendió de perdiz la mitad que la de pavo.

Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar la cantidad de kg vendidos de cada tipo de carne.

Prof. RODOLFO E. RUIZ