

DIVISIBILIDAD

Múltiplos de un número: Se llama múltiplo de un número al producto de dicho número por cualquier número natural (incluyendo al cero).

Los múltiplos de 2 = $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$

Los múltiplos de 3 = $\{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$

También, en general, decimos que: Un número a es múltiplo de otro número b si al dividir a entre b la división es exacta.

Divisores de un número: Un número es divisible por otro cuando la división entre ellos es exacta. Los divisores de un número son finitos y siempre van a ser menores o iguales que ese número.

Factores y divisores

Todo número puede expresarse como un producto.

Por ejemplo:

$$12 = 3 \cdot 4$$

⇓

3 y 4 son
factores de 12

$$12 : 3 = 4$$

$$12 : 4 = 3$$

⇓

Aquí 3 y 4 son
divisores 12

Decir que 3 y 4 son factores de 12 equivale a decir que 3 y 4 son divisores de 12.

Definición: Un número se dice divisible por otro cuando al ser dividido por éste da un cociente exacto.

En símbolos:

Son expresiones equivalentes

a divisible por b

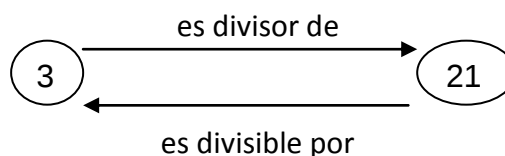
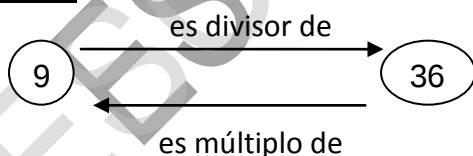
$$a = \dot{b}$$

$a : b$ es división exacta

Ejemplos: 5 es divisor de 15

7 es divisor de 28

Es decir:

**Para tener en cuenta:**

- 1) Todo número es divisible por sí mismo y por la unidad.
- 2) El número uno es divisor de todos los números. Todos los números son múltiplos de uno.
- 3) Todo número tiene infinitos múltiplos. Basta multiplicarlos por cualquiera de los infinitos números naturales para obtener un múltiplo.
- 4) El número cero es múltiplo de todos los números. (cualquier número multiplicado por cero, es igual a cero).
- 5) Para encontrar los divisores de un número, se lo divide por los números naturales menores que él, excluido el cero. Los números que dan cocientes exactos son los divisores.

Ejemplo: Calcula los divisores de 12

Se sabe que dos divisores de 12 son 1 y 12, porque todo número es divisible por sí mismo y por la unidad.

Para calcular los otros, se divide 12 por los números naturales desde 2 hasta 11, luego:

Los divisores de 12 = {1,2,3,4,6,12}

 **Actividad:** Calcula los divisores de 8, 15 y 17

Los divisores de 8 = {... ..}; los de 15 = {... ..}; los de 17 = {... ..}

Algunos Criterios de divisibilidad

Para saber si un número es divisible por otro, no siempre es necesario realizar la división para verificar si es exacta.

Existen criterios de divisibilidad que permiten saber cuándo un número es divisible por otro.

Divisible por:	Criterio	Ejemplo
2	Un número es divisible por 2 cuando la cifra de las unidades es múltiplo de 2 (número par)	568 8 = 2
3	Un número es divisible por 3 si la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 3	276 2+7+6 = 15 15 = 3
4	Un número es divisible por 4 cuando el número formado por las dos últimas cifras es múltiplo de 4	1516 16 = 4
5	Un número es divisible por 5 cuando la cifra de las unidades es múltiplo de 5 (0 ó 5)	2575 5 = 5
6	Un número es divisible por 6 cuando es divisible por 2 y por 3	144 4 = 2 1+4+4 = 9 9 = 3
9	Un número es divisible por 9 si la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 9	729 7+2+9 = 18 18 = 9
10	Un número es divisible por 10 si la cifra de las unidades es cero	120 1540 500

Números Primos y Compuestos

¿Cuántos divisores tienen 3, 5 y 17?

Ejemplos: 3 tiene divisores y son:

5 tiene divisores y son:

17 tiene divisores y son:

Es decir que 3, 5, 17 son

Número primo: Se dice que un número natural es primo cuando es divisible únicamente por sí mismo y por la unidad.

¿Cuántos divisores tienen 4, 6 y 15? ¿Cuáles son?

Ejemplo: 4 tiene más de dos divisores: 1, 2 y 4

6 tiene más de dos divisores: 1, 2, 3 y 6

15 tiene más de dos divisores: 1, 3, 5 y 15

Número compuesto: Todo número, distinto de cero, es compuesto cuando admite algún divisor distinto de sí mismo y de la unidad.

Observación: Los números 0 y 1 no se consideran primos ni compuestos.

Manera de reconocer si un número es primo

Para saber si un número es primo basta averiguar si es divisible por algún número primo menor que él, pues de no serlo por un número primo, no puede serlo por un número compuesto. Por ejemplo el número 23:

$$\begin{array}{r} 23 \div 2 \\ 03 \quad 11 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \div 3 \\ 2 \quad 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \div 4 \\ 3 \quad 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \div 5 \\ 3 \quad 4 \end{array}$$

Si se llega a una división en que el cociente es menor que el divisor, sin haber obtenido ningún cociente exacto, el número es primo.

Descomposición de un número en factores primos

Sea el número 120. Se observa que 120 es divisible por 2, el menor número primo.

Luego, $120 = 2 \cdot 60$

A su vez, $60 = 2 \cdot 30 \quad \therefore \quad 120 = 2 \cdot 2 \cdot 30$

$30 = 2 \cdot 15 \quad \therefore \quad 120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15$

Y reemplazando 15 por sus factores primos 3 y 5, resulta: $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Todo número compuesto puede expresarse como producto de factores primos.

Disposición práctica:

$$\begin{array}{r|l} \text{Ejemplo: } 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \therefore 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Actividad:

- 1) Halla los números primos menores que 20.
- 2) Averigua si 149 es número primo.
- 3) Expresa en factores primos los siguientes números: 242, 510, 845.

Máximo Común Divisor

Definición: Se llama máximo común divisor de dos o más números al mayor de los divisores comunes a esos números.

Por ejemplo, si se quiere averiguar el MCD de 12 y 18 podemos expresar:

Divisores de 12= {1, 2, 3, 4, **6**, 12}

Divisores de 18= {1, 2, 3, **6**, 9, 18}

Luego decimos que: M.C.D. (12; 18)= 6

Cálculo del máximo común divisor por descomposición en factores primos

Se descompone cada uno de los números en sus factores primos. El producto formado por los factores **comunes** considerados con su **menor** exponente es el máximo común divisor de los números dados.

Ejemplo: Calcula el M.C.D de 24 y 18

$$\begin{array}{r|l}
 24 & 2 \\
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$24 = 2^3 \cdot 3 \qquad 18 = 2 \cdot 3^2, \text{ luego el MCD (24;18)=.....}$$

Actividad: Halla el:

M.C.D (54;90);

MCD(21;30;42)

Mínimo Común Múltiplo

Definición: Se llama mínimo común múltiplo de dos o más números al menor de los múltiplos comunes de los números dados.

Por ejemplo, si se quiere averiguar el **mcm** de 4 y 6 podemos expresar:

$$4 = \{4, 8, \mathbf{12}, 16, 20, 24, \dots\}$$

$$6 = \{6, \mathbf{12}, 18, 24, 30, 36, \dots\}$$

Entonces el **mcm** (4; 6) = 12

Cálculo del mínimo común múltiplo por descomposición en factores primos

Se descompone cada uno de los números en sus factores primos. El producto formado por los factores **comunes y no comunes**, con su **mayor** exponente, es el mínimo común múltiplo de los números dados.

Ejemplo: Halla el M.C.M de 125, 75 y 50

$$\begin{array}{r|l}
 125 & 5 \\
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 75 & 3 \\
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 50 & 2 \\
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$125 = 5^3 \quad 75 = 3 \cdot 5^2 \quad 50 = 2 \cdot 5^2$$

$$\text{Entonces el mcm } (125, 75, 50) = 5^3 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{750}$$

 Actividad: Calcula el mínimo común múltiplo de 24, 12 y 8

$$\text{mcm } (24, 12, 8) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

 Actividad:

1) Calcula el M.C.D y el m.c.m. de los siguientes números, mediante la descomposición en factores primos:

a) 84 y 210

b) 135, 80

c) 48, 280 y 720

d) 18, 30, y 12

2) Resuelve los siguientes problemas aplicando MCD y mcm cuando corresponda.

a) Dos letreros luminosos se encienden con intermitencias de 42 y 54 segundos. A las 20 h 15 min se encienden simultáneamente. ¿A qué hora vuelven a encenderse juntos?

b) Un librero recibe una partida de 130 libros de Matemática y 195 libros de lengua. Quiere acomodarlos poniendo igual cantidad de libros en cada estante, pero sin mezclar los de Matemática con los de lengua. Para ocupar la menor cantidad de estantes, ¿cuántos libros deberá colocar en cada uno? ¿Cuántos estantes ocupará?



(CORRESPONDE AHORA REALIZAR LA ACTIVIDAD)

ACTIVIDAD: Divisibilidad, MCM, MCD – 2do año D – Ciclo Básico – Escuela de Minas

- 1) a) Escribe cinco múltiplos de 7.
b) Escribe los cinco primeros múltiplos de 10.
c) Escribe todos los divisores de: 21, 15, 30 y 36.
- 2) Descompone en factores primos los siguientes números:
a) 845 b) 510 c) 484 d) 990
- 3) Calcular el M.C.D y el m.c.m de los siguientes números, mediante la descomposición en factores primos:
a) 18, 40 y 12 c) 135, 80 y 260
b) 48, 280 y 720 d) 84, 210 y 105
- 4) Resuelve los siguientes problemas aplicando M.C.D y m.c.m cuando corresponda.
 - a) Dos ciclistas parten al mismo tiempo de una pista. Uno da una vuelta en 90 segundos y el otro en 80 segundos. ¿Cuántos segundos pasarán antes que puedan encontrarse?
 - b) Unos chicos habían observado que un velero pasaba a lo lejos cada 15 días, un buque cada 40 días y un barquito cada 12 días. ¿Cuántos días deberán esperar para verlos juntos a los tres?
 - c) Tres personas desean repartir 180 libros, 240 juguetes y 360 chokolatines, respectivamente, entre un cierto número de niños, de tal modo que uno reciba un número exacto de libros, de juguetes y de chokolatines. ¿Cuál es el mayor número de niños que puede beneficiarse en esa forma?
 - d) Se desean acondicionar 1830 latas de tomate y 1170 latas de arveja en un cierto número de cajones que contengan el mismo número de latas, sin que sobre ninguna y sin mezclar las latas. ¿Cuál será el mayor número posible de latas que puedan ponerse en cada cajón?
 - e) Un padre y sus dos hijos son marineros y hacen su trabajo en barcos de cabotaje. El padre tarda 10 días en hacer su recorrido; el hijo mayor, 8 días y el menor, 6 días. Si parten los tres el mismo día ¿al cabo de cuántos días se encontraran los tres de nuevo en su casa?
 - f) ¿Cuál es el menor número que al dividirlo separadamente por 15, 20, 36 y 48 en cada caso da de resto 9?
 - g) Se desean acomodar 1.830 latas de tomate y 1.170 latas de arveja en un cierto número de cajones que contengan el mismo número de latas, sin que sobre ninguna y sin mezclar las latas. ¿Cuál será el mayor número posible de latas que puedan ponerse en cada cajón?
 - h) Se tienen tres cubos de 84 cm^3 , 270 cm^3 y 330 cm^3 . ¿Cuál es el mayor volumen en cm^3 que cabe un número exacto de veces en cada uno de ellos?
 - i) Un trozo de cartulina mide 100 cm por 45 cm y quiero dibujar en ella una cuadrícula del mayor tamaño posible cada cuadrado. ¿Cuál será el lado del mayor cuadrado posible?
 - j) Un carpintero quiere cortar una plancha de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrado lo más grande posible. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?