APLICACIONES DE LAS DERIVADAS AL ANÁLISIS DE FUNCIONES

Intervalos de crecimiento:

Una función f(x) es creciente en un cierto intervalo (a,b) de su dominio si y solo sí , para cualquier valor de **c** que pertenece a la pendiente de la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto (c,f(c)), ésta es positiva.

f(x) es creciente en (a,b) si f'(x)>0 en cualquier valor c de dicho intervalo .

Intervalos de decrecimiento:

Una función f(x) es decreciente en un cierto intervalo (a,b) de su dominio si y solo sí , para cualquier valor de **c** que pertenece a la pendiente de la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto (c,f(c)), ésta es negativa.

f(x) es creciente en (a,b) si f'(x)<0 en cualquier valor c de dicho intervalo .

Maximos o mínimos:

En el/los valores de c donde se verifica que f'(c). = 0 o no existe decimos que la función tiene un extremo.

Situación 1:

La función B(x)= $x^3 - 21x^2 + 60x - 6$ permite calcular la cantidad de bacterias, presentes en cierto momento en una sustancia (tiempo en segundos)

a -.En qué momento la cantidad de bacterias alcanza un máximo y en cual un mínimo?

b -Determinar cuando aumenta la cantidad de bacterias y cuando disminuye.

c -Graficar la función B(x).

ESCUELA DE MINAS

Análisis de la situación

La variable x en este caso es el tiempo es decir el dominio de la función es $[0,\infty)$

a. Valores máximo y mínimos:

B'(x)=0

$$6x^2 - 42x + 60 = 0$$

Para determinar en ue valores la función alcanza valores máximos y minimos analizamos para cuales es igual a cero

$$6x^2 - 42x + 60 = 0 \ , \ en\ los\ valores\ x = 2\ y\ x = 5$$

En el valor 2 la primera derivada es 0 y la segunda derivada es negativa por lo tanto en x= 2 hay un punto MAXIMO

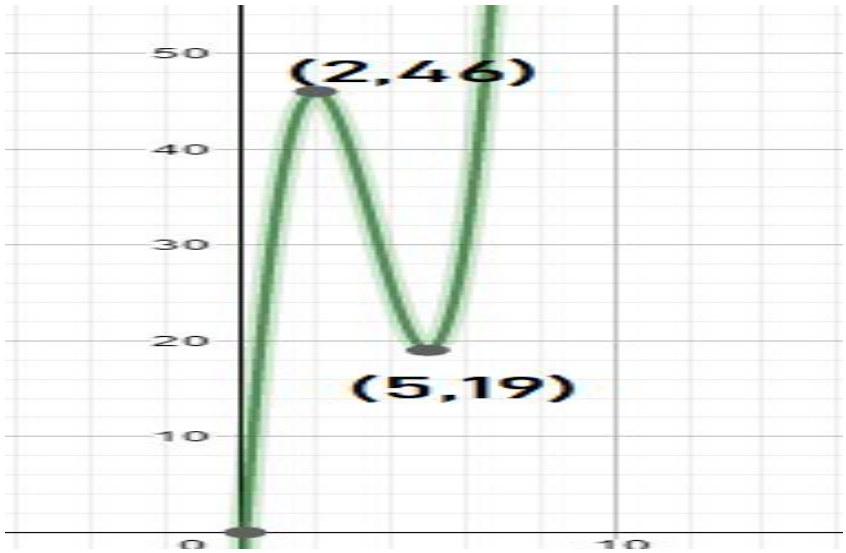
En el valor x= 5 la primera derivada es 0 y la segunda derivada es positiva por lo tanto en x=5 hay un punto MINIMO

Analizando los intervalos correspondientes podemos decir ue:

$b-$ $En\ el\ intervalo\ [0,2)$, el numero de bacterias crece.

$En\ el\ intervalo\ (2,5),$, el número de bacterias decrece.

$En\ el\ intervalo\ (5,\infty)$, el número de bacterias crece

C.- 

Función cóncava:
Una función es cóncava en un intervalo de su dominio si tiene la siguiente forma

Si una función es cóncava, en cierto intervalo, la derivada segunda de la función, en ese intervalo es mayor que 0

Función convexa
Una función es convexa en un intervalo de su dominio si tiene la siguiente forma

Si una función es convexa, en cierto intervalo, la derivada segunda de la función, en ese intervalo es menor que 0

Nota. Los puntos máximos se encuentran donde la función es convexa (o cóncava hacia abajo)
Y los puntos mínimos se encuentran en los intervalos donde la función es cóncava (o concava hacia arriba)

Punto de inflexión.
Es aquel en el cual la curva representativa de la función cambia su concavidad, y entonces la segunda derivada es igual a 0.

Situación : Analizar los intervalos de concavidad y puntos de inflexión la función $f(x)= x^3$

Comencemos por determinar los intervalos donde la primera derivada cambia su signo, para ello vemos en ue valores la segunda derivada es igual a cero
$f'(x)=3x^2$, cuando x = 0 , la primera derivada es igual a 0
la segunda derivada es igual a
$f''(x)= 6x$
$f''(0)= 0$

A. En el punto I (0,0) la primera y segunda derivada son iguales a 0

Ademas en el intervalo $(-\infty,0)$ la segunda derivada negativa, entonces la función es cóncava hacia abajo y en el intervalo $(0,+\infty)$ la segunda derivada es positiva, entonces la función es cóncava hacia arriba.

B. En el punto I(0,0) la función cambia la concavidad .

Por A. y B. concluimos que el punto I(0,0) es un punto de INFLEXIÓN

Optimizacion

El estudio de máximos y mínimos de una función permiten resolver problemas en los ue se quiere optimizar el valor de alguna magnitud.

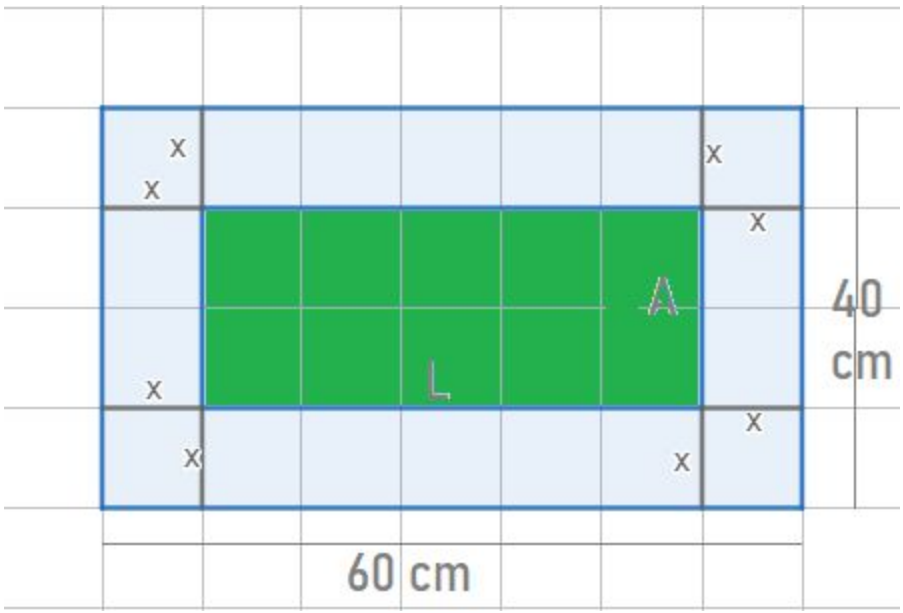
- Ej. Superficie máxima de un rombo conocido su perímetro
- Volumen máximo de un cuerpo conocida su superficie
- Las dimensiones de un prisma recto para ue el gasto de construcción sea el mínimo, etc.

Para resolver estas situaciones se debe encontrar una fórmula que relacione los datos y luego utilizar las derivadas como herramientas para el cálculo de lo que se precise o solicite .

Situación 3:

Con una placa de metálica de 60 cm de largo y 40 cm de ancho se desea confeccionar una bandeja rectangular donde puedan hornearse bizcochuelos de volumen máximo. ¿qué dimensiones debe tener esa bandeja?

Vamos a llamar A,L y H al ancho, largo y alto de la caja respectivamente
Por formula de volumen tenemos
V= A.L.H
Si realizamos una figura de análisis



A= 40 -2x

L= 60-2x

H= x

V(x)= (40-2x)(60-2x) x

V(x)= 2400x-200x²+4x³

V'(x)=2400-400x+12 x²

V'(x) = 0 Igualar a 0 la primera derivada

2400-400x+12 x² = 0

$$x_1, x_2 = \frac{400 \pm \sqrt{400^2 - 4.12.2400}}{2.12}$$

$x_1 =$ **25,48 cm**

$$x_2 = 7,84cm$$

Como vemos existen dos posibilidades la primera no es posible puesto que el ancho de la lámina es de 40 cm y si tenemos que cortarle x= 51, 96, no sería posible.

Por lo tanto, para obtener el volumen máximo de bandeja deberemos cortar en cada esquina cuadrados de 7,84 cm de lado.

Rta. La bandeja deberá tener 44,3 cm de largo, 4,3 cm de ancho y 7, 84 cm de alto

ESCUELA DE MINAS

ASINTOTAS:

Una curiosidad; la palabra asíntota proviene del griego y significa ‘‘sin encontrarse y sin tocarse’’ , en Matemáticas las utilizamos para nombrar a una recta que se acerca a una curva a medida que se extiende en el plano de manera tal que nunca se cortan.

Asíntota vertical

Una forma	Otra forma
En una función racional cualquier valor de x que anule el denominador nos permite escribir la ecuación de la asíntota vertical $f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$ Como ven el denominador se anula cuando x=3. Decimos entonces ue la ecuación de la Asíntota vertical es **x=3** En gral x=K	También podemos encontrar la ecuación de la asíntota vertical haciendo $f(x) = \infty$ $\frac{2x+4}{x-3} = \infty$ AV: x= 3

Asíntota horizontal

Una forma	Otra forma
Para que una función racional tenga asíntota horizontal es necesario que el grado del numerador sea menor o igual al grado del denominador. En este ejemplo vemos que la condición se cumple. $f(x) = \frac{2x+4}{1x-3}$ La AH es y= K En este caso dividimos los coeficientes de los términos de igual grado (2:1= 2), entonces: AH es y=2	También podemos encontrar la ecuación de la asíntota vertical haciendo $f(x) = k$ $\frac{2x+4}{x-3} = k$ Este límite nos da 2 Entonces la AH es Y=2

Asíntota Oblicua.

Una forma	
Para que una función racional tenga asíntota oblicua, es necesario que el grado del numerador sea igual al grado del denominador +1 $f(x) = \frac{3x^2-4}{1x+1}$ La AO tiene la forma f(x)= mx +b La asíntota oblicua se obtiene encontrando el cociente de la división entre el numerador y el denominador	

ESCUELA DE MINAS

$(3x^2 + 0x - 4) : (1x - 1) =$ 3x -3	

ESCUELA DE MINAS