

RAZONES Y PROPORCIONES NUMÉRICAS

RAZÓN

Dados en un cierto orden dos números a y $b \neq 0$ se llama razón entre a y b , al número n , cociente entre ambos números.

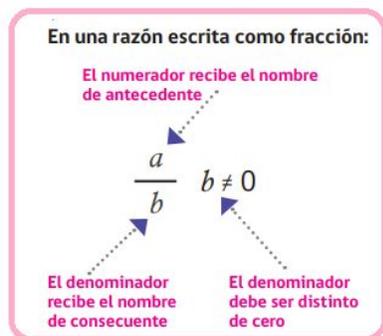


fig 1

En la razón de la fig 1 al primer número "a" se le llama antecedente de la razón y al segundo "b" se le llama consecuente.

Ejemplos:

La razón entre el número 12 y el número 3 es $12:3 = 4$

La razón entre el número 15 y el número 2 es $\frac{15}{2}$ (cuando la división exacta no es posible se escribe en forma de fracción)

PROPORCIÓN

Dados en un cierto orden cuatro números a, b, c y $d \neq 0$, se dice que forman proporción cuando la razón entre los dos primeros a y b es igual a la razón entre los dos últimos c y d .

De la misma manera puede decirse que: **una proporción es una igualdad entre dos razones**

extremos $\leftarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ Esta proporción se llama proporción ordinaria.

\leftarrow medios

Los números a y d se llaman extremos de la proporción y los números c y b , medios.

k es la constante de proporcionalidad

Al extremo d se le llama cuarto proporcional.

Ejemplo:

$\frac{8}{3} = \frac{16}{6}$ Proporción ordinaria en donde la constante de proporcionalidad $k = \frac{8}{3}$

$$\frac{14}{7} = \frac{16}{8} \text{ proporción ordinaria en donde la constante de proporcionalidad } k=2$$

PROPORCIÓN CONTINUA

Una proporción, se dice continua, cuando los medios son iguales. Al extremo c se le llama tercero proporcional y al medio b se le llama medio proporcional

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES

En toda proporción "EL PRODUCTO DE LOS MEDIOS ES IGUAL AL PRODUCTO DE LOS EXTREMOS".

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a.d = b.c$$

Ejemplos:

$$\frac{5}{7} = \frac{10}{14} \leftrightarrow 5.14 = 7.10$$

$$\frac{8}{16} = \frac{2}{4} \leftrightarrow 8.4 = 16.2$$

Recíprocamente dos productos iguales pueden escribirse como una proporción

$$a.d = b.c \leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Ejemplos:

$$5.14 = 7.10 \leftrightarrow \frac{5}{7} = \frac{10}{14}$$

$$8.4 = 16.2 \leftrightarrow \frac{8}{16} = \frac{2}{4}$$

CALCULO DE EXTREMOS O MEDIOS DESCONOCIDOS EN UNA PROPORCIÓN

Se realiza aplicando la propiedad fundamental de las proporciones (P.F.P) y despejando el elemento que se desea conocer:

Ejemplo

$$\text{a.- } \frac{x}{16} = \frac{2}{4} \text{ aplicando la P.F.P. } \mathbf{x \cdot 4 = 16.2}$$

$$\mathbf{X = 16.2 : 4}$$

$$\mathbf{X = 8}$$

$$\text{b.- } \frac{8}{x} = \frac{2}{4} \text{ aplicando la P.F.P. } \mathbf{8 \cdot 4 = x \cdot 2}$$

ESCUELA DE MINAS "DR. HORACIO CARRILLO"
MATEMATICA II

$$32 = x \cdot 2$$

$$32:2 = x$$

$$16 = x$$

Si la proporción fuese continua se realiza el mismo procedimiento, un caso particular sería

Ejemplo :

$\frac{4}{x} = \frac{x}{1}$ En este caso el procedimiento es, **$4 \cdot 1 = x \cdot x$**

$$4 = x^2$$

$$\sqrt{4} = x$$

$$2 = x$$

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

- En toda proporción la suma del antecedente y el consecuente de la primera razón es a su antecedente, como la suma del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su antecedente.

Simb.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

- En toda proporción la suma del antecedente y el consecuente de la primera razón es a su consecuente, como la suma del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente.

Simb.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

- En toda proporción la diferencia del antecedente y el consecuente de la primera razón es a su antecedente, como la suma del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su antecedente.

Simb.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$$

- En toda proporción la diferencia del antecedente y el consecuente de la primera razón es a su consecuente, como la suma del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente.

Simb.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

Situación 1: Luis y Pedro tienen ahorrados 7000 pesos. Si la razón entre las cantidades de dinero de Luis y Pedro es igual a $\frac{2}{5}$ ¿Cuánto dinero tiene ahorrado cada uno?

Lo primero que se debe hacer es escribir una proporción y completar con los datos del problema.

$$\text{Si } \frac{L}{P} = \frac{2}{5} \text{ entonces } \frac{L+P}{L} = \frac{2+5}{2}$$

pero $L+P= 7000$

$$\frac{7000}{L} = \frac{2+5}{2}$$

Esta última expresión es una proporción con un medio desconocido, aplicando la **PFP**

$$\begin{aligned} 7000 \cdot 2 &= 7 \cdot L \\ 14000 &= 7 \cdot L \\ 14000:7 &= L \\ 2000 &= L \end{aligned}$$

Entonces Luis tiene 2000 pesos , en consecuencia Pedro tiene 5000 pesos.

Si hubiésemos aplicado la segunda propiedad tendríamos.

si $\frac{L}{P} = \frac{2}{5}$ entonces $\frac{L+P}{P} = \frac{2+5}{5}$

pero $L+P= 7000$

$$\frac{7000}{P} = \frac{2+5}{5}$$

Esta última expresión es una proporción con un medio desconocido, aplicando la **PFP**

$$\begin{aligned} 7000 \cdot 5 &= 7 \cdot P \\ 35000 &= 7 \cdot P \\ 35000:7 &= P \\ 5000 &= P \end{aligned}$$

Lo que nuevamente verifica que Pedro tiene 5000 pesos y Luis 2000 pesos.

Situación 2: La diferencia entre las edades de una madre y su hija Juana es de 20 años y su razón $3/2$. ¿Qué edad tiene cada una?

Aplicando la propiedad 4

Si $\frac{M}{J} = \frac{3}{2}$ entonces $\frac{M-J}{M} = \frac{3-2}{3}$

Pero $M - J = 40$ entonces

$$\frac{20}{M} = \frac{1}{3}$$

Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones

$$20 \cdot 3 = M \cdot 1$$

$$60 = M$$

Rta. La mamá de Juana tiene 60 años y su hija 40.

Propiedad de la serie de razones iguales

En una serie de razones iguales la suma de todos los antecedentes es a la suma de todos los consecuentes como un antecedente es a su consecuente

Simb.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ entonces $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}$ también

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ entonces $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{c}{d}$ también

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ entonces $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{e}{f}$

Situación 3.

Un abuelo tiene 4500000 pesos y quiere repartir su dinero entre sus tres nietos de 12, 15 y 18 años, pero lo quiere hacer de manera proporcional a sus edades. ¿Qué cantidad de dinero le corresponderá a cada uno?

$$\frac{a}{12} = \frac{c}{15} = \frac{e}{18} \text{ entonces}$$

$$\square \frac{4500000}{12+15+18} = \frac{a}{12}$$

$$\frac{4500000}{45} = \frac{a}{12}$$

Aplicando propiedad fundamental de las proporciones.

$$4500000 \cdot 12 = 45 \cdot a$$

$$\frac{4500000 \cdot 12}{45} = a$$

ESCUELA DE MINAS "DR. HORACIO CARRILLO"
MATEMATICA II

$$1200000 = a$$

Es decir que el nieto que tiene 12 años recibirá 1200000 \$

$$\square \frac{4500000}{12+15+18} = \frac{a}{12}$$
$$\frac{4500000}{45} = \frac{c}{15}$$

Aplicando propiedad fundamental de las proporciones.

$$4500000.15 = 45.c$$

$$\frac{4500000.15}{45} = c$$

$$1500000 = c$$

Es decir que el nieto que tiene 15 años recibirá 1500000 \$

Solo queda averiguar cuanto recibirá el que tiene 18 años , pero como la situación planteada es muy sencilla , podemos infereir que el nieto que tiene 18 años recibirá 1800000\$