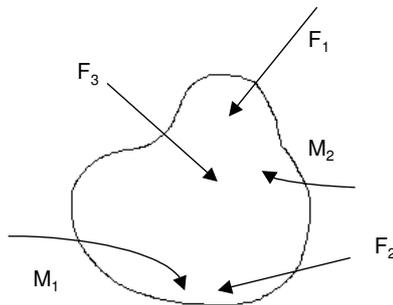


1. Principios Básicos de Resistencia de Materiales

1.1. EQUILIBRIO ESTÁTICO

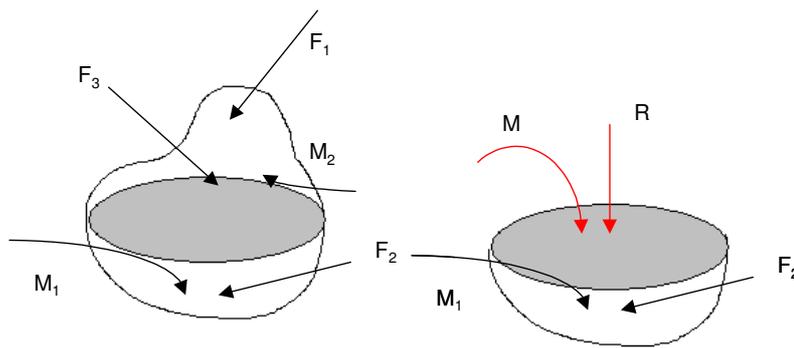
Se define como aquella condición en la cual sometido el cuerpo a una serie de fuerzas y momentos exteriores se mantiene en reposo o con un movimiento uniforme:



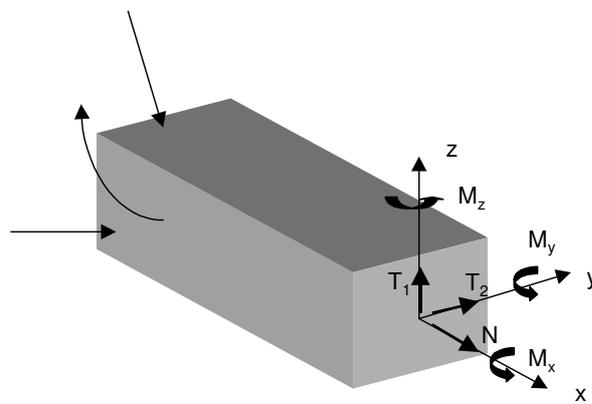
$$\begin{aligned}\sum F &= 0 \\ \sum M &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

1.2. PRINCIPIO DE CORTE

Si a un cuerpo en equilibrio se le corta por una sección cualquiera sigue estando sometido a las fuerzas y momentos exteriores. Para que siga estando en equilibrio tenemos que colocar en la sección cortada una resultante de fuerzas y una resultante de momentos, que los representaremos como R y M . En dicha sección existen unas tensiones, fuerzas por unidad de área, que dan como resultante R y M . A pesar de que dichas fuerzas son interiores si se considera todo el sistema, son exteriores cuando se aplican sobre el subsistema. El subsistema aislado con las fuerzas exteriores que actúan sobre él y las fuerzas resultantes de la interacción con el sistema total se denomina **diagrama de sólido libre**.



Dentro de cada sección de corte existirán esfuerzos y momentos para compensar los exteriores.
Los tipos de solicitaciones que encontraremos serán:



- Esfuerzos perpendiculares a la sección N (tracción o compresión)
- Esfuerzos contenidos en la sección T (cortadura)
- Momentos
 1. En el eje z M_z , flexión
 2. En el eje y M_y , flexión
 3. En el eje x M_x , torsión

1.3. CONCEPTO DE TENSIÓN UNITARIA. COMPONENTES DEL ESFUERZO

La barra de la Figura está sometida a un esfuerzo de tracción F_N . Si se corta la barra según una sección BB perpendicular a su eje, la resultante de las tensiones que actúan sobre la sección de corte, de área A_c , será igual a F_N . Suponiendo una distribución uniforme de F_N a lo largo de la superficie, puede introducirse el concepto de fuerza por unidad de superficie, σ_a , como:

$$\sigma_a = \frac{F_N}{A_c} \tag{2}$$

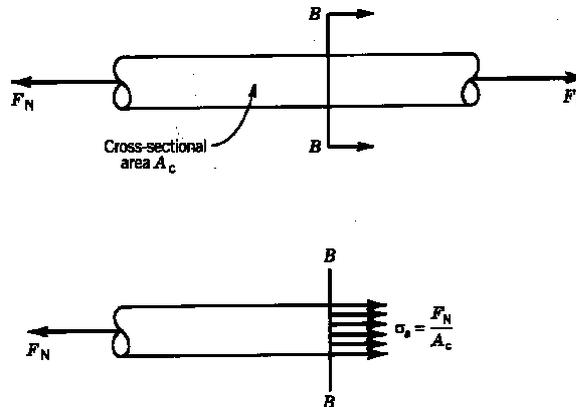


Figura 1 - Barra sometida a esfuerzo de tracción
A partir de la ecuación (2), se define el concepto de tensión unitaria:

$$\sigma = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta F_N}{\Delta A_c} = \frac{dF_N}{dA_c} \tag{3}$$

que es **el esfuerzo por unidad de área que se ejerce entre las dos partes de un cuerpo, dividido idealmente por un determinado plano BB, a través de una superficie de BB de tamaño infinitesimal, alrededor de un punto.**

La tensión unitaria se refiere a un punto y a un plano (BB). Como es una fuerza, la tensión unitaria es un vector, por lo que, por regla general, podremos considerar 3 componentes, una normal y dos situadas en el plano - *tensión normal* y *tensiones tangenciales* - y se suelen designar σ y τ , respectivamente.

Por convenio, la tensión se identificará con dos subíndices: el primero identifica el plano donde está aplicada la tensión (corresponde a la normal a este plano) y el segundo corresponde a la dirección de la tensión (Figura 2).

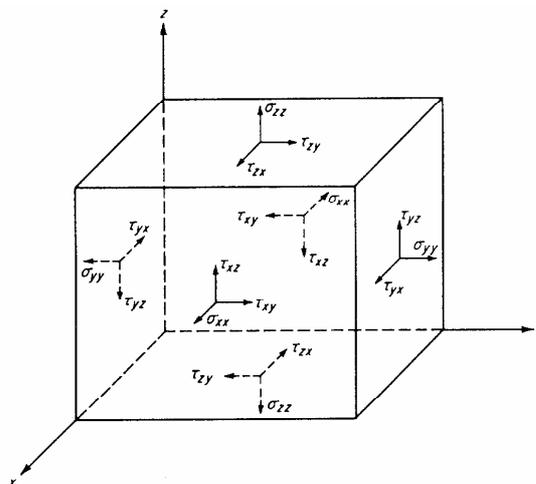


Figura 2 - Convenio de notación para las tensiones

La convención clásica establece que los esfuerzos normales σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{zz} son positivos si están dirigidos hacia el exterior del elemento (tracción). Los esfuerzos cortantes actuantes en caras positivas τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{zx} , τ_{yx} y τ_{zy} son positivos si se ejercen en la dirección positiva de un eje de referencia.

Como el elemento que se presenta está en equilibrio estático, las caras negativas de dicho elemento tendrán esfuerzos cortantes que actúan en la dirección opuesta, pero también se les considera positivos.

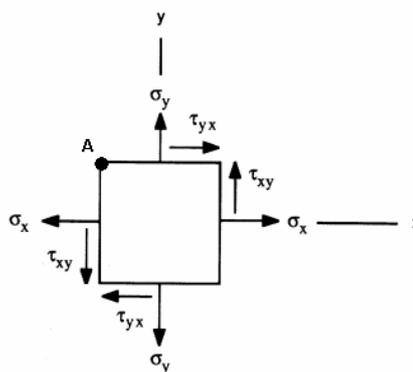
Por otro lado, planteando el equilibrio de fuerzas en el elemento se deduce la simetría del tensor de tensiones:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

Realicemos la demostración para el caso bidimensional:



Consideremos este elemento en equilibrio estático:

$$\sum M_A = 0$$

$$\tau_{xy} \cdot (dydz)dx - \tau_{yx} \cdot (dxdz)dy = 0$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

1.4. HIPÓTESIS DE RESISTENCIA

□ **Primera hipótesis: elasticidad perfecta.** Elasticidad es la propiedad del material tal que le permite recuperar su forma y dimensiones originales una vez quitada la carga. La elasticidad perfecta implica el cumplimiento de la Ley de Hooke, que establece una proporcionalidad entre las tensiones y las deformaciones, siendo **E** el **Módulo de Elasticidad o Módulo de Young** la constante de proporcionalidad.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Un material elástico no cumple necesariamente la ley de Hooke. No obstante, todo material que cumple dicha ley es elástico.

En el caso del acero, se adopta un valor de $E=210\text{Gpa}$, en el caso del cobre $E=105\text{Gpa}$ y en el caso del aluminio $E=70\text{Gpa}$.

Una pieza de longitud L_0 sometida a una fuerza tractiva, se alargará una cantidad δ que se denomina deformación. Se define como deformación unitaria la deformación por unidad de longitud:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

Experimentalmente se demuestra que cuando un material se tracciona, existe no solo una deformación axial sino también una contracción lateral. Poisson demostró que dichas deformaciones eran proporcionales en el rango de elasticidad perfecta, siendo ν la constante de proporcionalidad que se denomina **Módulo de Poisson**. En el caso de los metales su valor es 0.3

$$\nu = -\frac{\text{lateral}}{\text{axial}}$$

La elasticidad perfecta para tensiones de cortadura implica que existe una proporcionalidad entre las tensiones τ y la deformación angular γ :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

donde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. **G** se define como el **Módulo de Elasticidad a Cortadura**.

□ **Segunda hipótesis: homogeneidad**. Todas las piezas tienen las mismas propiedades en toda su extensión

□ **Tercera hipótesis: isotropía**. Todas las piezas tienen las mismas propiedades en todas las direcciones

1.5. SOLICITACIONES

1.5.1. TRACCIÓN

Se presenta cuando sobre un elemento actúan dos fuerzas iguales pero de sentido contrario y que tienden a alargar el material. Para tener únicamente tracción, el esfuerzo de situarse en el centro de gravedad de la sección.

Las tensiones se estudian en el sentido del corte. Si cortamos una sección perpendicular al esfuerzo a una distancia x y lo separamos del resto, el esfuerzo P nos dará tensiones σ . Suponemos que las tensiones son uniformes, es decir, iguales en todos los puntos de la sección:

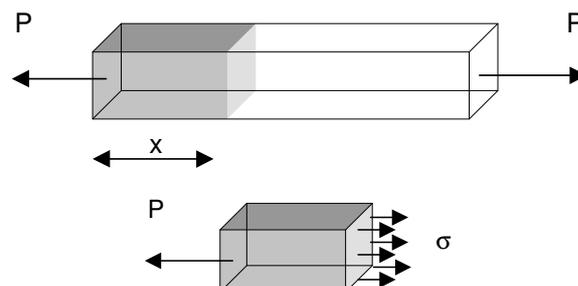


Figura 3 - Viga sometida a TRACCIÓN

$$\int \sigma \cdot dA = \sigma \cdot A = P, \text{ luego } \sigma = \frac{P}{A} \quad (4)$$

Por convenio se considera que la tracción es positiva.

Las deformaciones se deducen a partir de las siguientes expresiones:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (5)$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0} \quad (6)$$

$$\text{Luego, } \sigma = \frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L_0} \rightarrow \delta = \frac{P \cdot L_0}{E \cdot A} \quad (7)$$

1.5.2. COMPRESIÓN

Se presenta cuando sobre una pieza actúan dos fuerzas iguales pero de sentido contrario y que tienden a acortar el material.

Suponemos las mismas hipótesis e idéntico desarrollo que en tracción, salvo por el convenio de signos, que asigna valor negativo a la compresión.

$$\sigma = \frac{P}{A}(-) \quad (8)$$

$$\delta = \frac{P \cdot L_0}{E \cdot A}(-) \quad (9)$$

1.5.3. FLEXIÓN PURA

Es la consecuencia de unos esfuerzos o momentos exteriores que nos producen en la sección cortada exclusivamente un momento de flexión.

Consideramos las siguientes hipótesis de trabajo:

- La viga es originalmente recta con una sección transversal constante en la longitud de la viga.
- La viga posee un eje de simetría en el plano de flexión de la viga.
- Las proporciones de la viga son tales que falla por flexión antes que por pandeo, etc.
- Las secciones transversales permaneces planas después de la deformación

Consideremos una viga deformada sobre la cual tomamos un elemento diferencial:

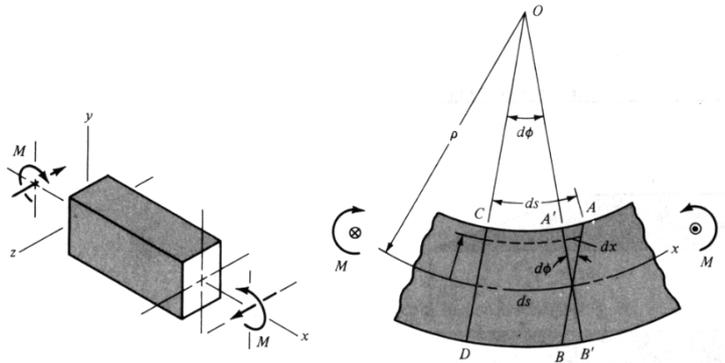


Figura 4 - Viga sometida a FLEXION PURA

En la figura anterior se muestra una viga sobre la que actúa un momento flector positivo M . El eje Y es el eje de simetría de la viga. El eje X coincide con la fibra neutra de la viga, y el plano XZ que contiene los ejes neutros de todas las secciones (paralelos al eje Z) recibe el nombre de superficie neutra. Los elementos de la viga que estén sobre dicha superficie tendrán deformación nula.

Al aplicar el momento M se produce una curvatura de la viga. Así, la sección AB (originalmente paralela a CD , puesto que la viga era recta) girará un ángulo $d\phi$ hasta la posición $A'B'$. Los trazos AB y $A'B'$ son rectos, de forma que se verifica la hipótesis de que las secciones planas permanecen así durante flexión. Si se denota ρ como radio de curvatura del eje neutro de la viga, ds la longitud de un elemento diferencial de dicho eje y $d\phi$ para el ángulo entre las rectas CD y $A'B'$, entonces se tiene que:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{ds} \quad (10)$$

El cambio de longitud de una fibra separada del eje neutro una distancia y es:

$$dx = -y \cdot d\phi \quad (11)$$

La deformación es igual a la variación de longitud dividida por la longitud inicial:

$$\varepsilon = \frac{dx}{ds} \quad (12)$$

Y sustituyendo las expresiones (11) y (12),

$$\varepsilon = -\frac{y}{\rho} \quad (13)$$

Así, la deformación es proporcional a la distancia y desde el eje neutro. Ahora bien, como $\sigma = E \cdot \varepsilon$, se tiene que:

$$\sigma = -\frac{E \cdot y}{\rho} \quad (14)$$

La fuerza que actúa sobre un elemento de área dA es $\sigma \cdot dA$, y puesto que dicho elemento está en equilibrio, la suma de fuerzas debe ser nula. Por consiguiente,

$$\int_A \sigma \cdot dA = -\frac{E}{\rho} \int_A y \cdot dA = 0 \quad (15)$$

La ecuación anterior determina la localización del **eje neutro de la sección**.

Por otro lado, el equilibrio requiere que el momento flector interno originado por el esfuerzo σ sea igual al momento externo M . Esto es,

$$M = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot I \quad (16)$$

Se define como el momento de inercia del área transversal con respecto al eje z : (I_z).

De la ecuación anterior,

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} \quad (17)$$

Finalmente, despejando ρ de la expresión (14) y sustituyendo en (17),

$$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I} \quad (18)$$

La ecuación anterior establece que la tensión es directamente proporcional a la distancia y desde el eje neutro y al momento flector M .

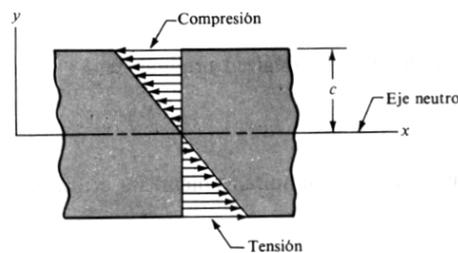


Figura 5 - Distribución de tensiones en FLEXION PURA

Si designamos por c la distancia máxima a la fibra neutra,

$$w = \frac{I}{c}, \text{ módulo resistente} \quad (19)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot c}{I} = \frac{M}{w} \quad (20)$$

Deflexión debido a flexión

Se ha desarrollado la expresión que relaciona el momento flector M con la curvatura de la viga a flexión expresión (17).

De estudios matemáticos se tiene que la curvatura de un plano curvo es:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (21)$$

En esta expresión, la pendiente de la viga en cualquier punto x se expresa como:

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (22)$$

En muchos problemas en flexión, donde la pendiente es muy pequeña, se puede considerar el denominador de la expresión (21) como la unidad. Entonces, dicha expresión se reescribe como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (23)$$

Y sustituyendo la expresión (17) en la expresión (23), se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (24)$$

Esta expresión se conoce como la **ecuación de la elástica en flexión**.

Cuando se considera que el eje Y va en sentido de vertical negativo, la expresión anterior se reescribe como:

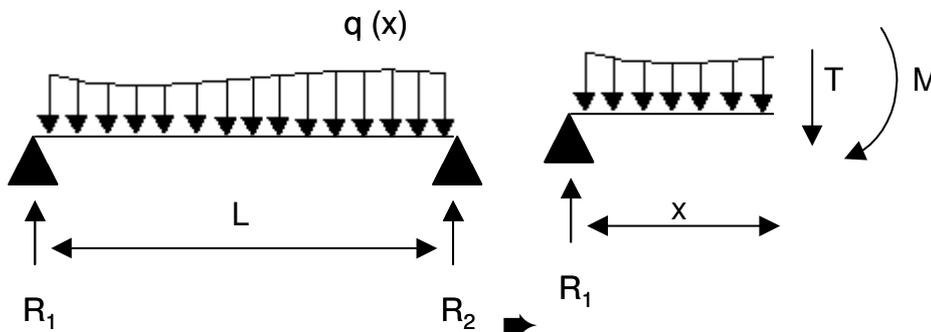
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (25)$$

1.5.4. FLEXIÓN SIMPLE: CORTADURA Y FLEXIÓN

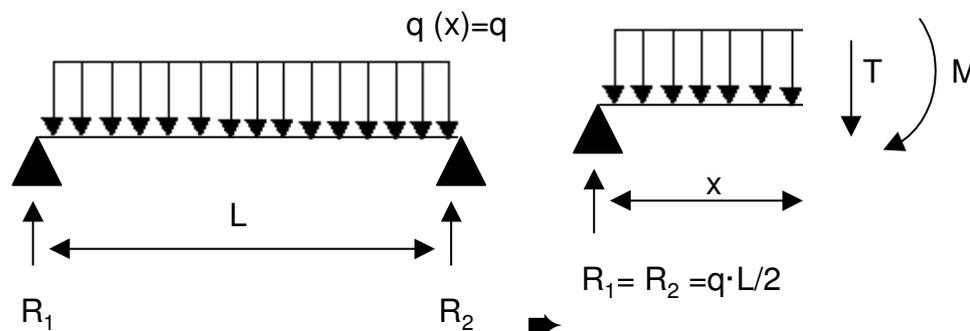
Es una sollicitación sobre una sección que combina un momento flector y un esfuerzo cortante contenido en dicha sección.

Ejemplos de flexión simple son los siguientes:

⇒ Vigas cargadas con cargas repartidas variables:



⇒ Vigas cargadas con cargas repartidas constantes:



$$M = q \frac{L}{2} x - q \frac{x}{2} x = q \cdot \frac{x}{2} \cdot (L - x)$$

$$T = q \cdot (L - x) - q \frac{L}{2} = q \cdot \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

Se define la cara positiva aquella en la que el eje X sale de la cara. El convenio de signos para momentos y esfuerzos cortantes.

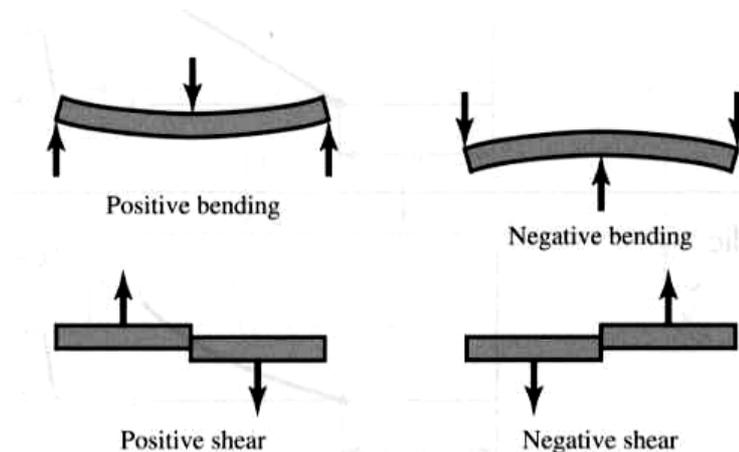
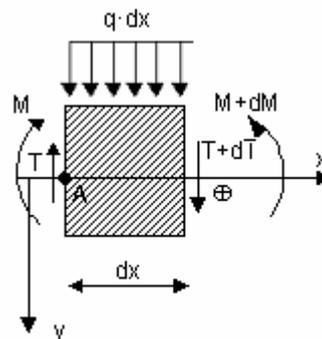


Figura 6 - Convención de signos en flexión y cortadura

Existe una relación entre los esfuerzos cortantes y los momentos flectores.



Puesto que la viga está en equilibrio se verifica:

$$\sum F_v = 0 \rightarrow -T + T + dT + q \cdot dx = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = -q \quad (26)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -(M + dM) + q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} + M + (T + dT) \cdot dx = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = T \quad (27)$$

Las conclusiones que se derivan de este desarrollo son:

- Si existe un esfuerzo cortante, se produce variación del momento flector.
- En los puntos donde $q=0$ se produce el valor máximo o mínimo del esfuerzo cortante T
- En los puntos donde $T=0$ se produce el valor máximo o mínimo del momento flector M

1.5.5. CORTADURA

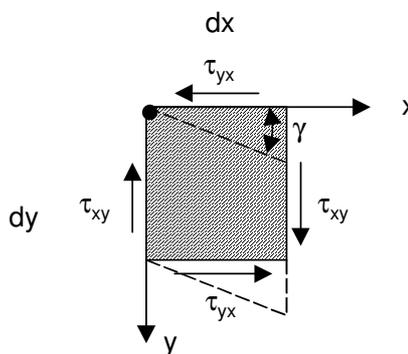
Los esfuerzos cortantes o esfuerzos de cortadura provocan la aparición de tensiones de cortadura dentro de la sección en la que actúan.

Las tensiones de cortadura se caracterizan porque:

- No provocan cambio de volumen, sólo producen una deformación angular. La proporcionalidad entre el ángulo deformado y la tensión viene dada por el módulo de elasticidad en cortadura o módulo de cortadura G : $\tau = G \cdot \gamma$ donde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

- Son iguales dos a dos y confluyen en un mismo punto

En el plano:



La deformación angular se denomina γ .

Cálculo de las tensiones de cortadura en vigas. Esfuerzo tangencial horizontal.

La mayoría de vigas tienen fuerzas de cortadura y momentos flectores. Sólo ocasionalmente encontramos vigas sometidas a flexión pura.

La fórmula de flexión se desarrolla asumiendo flexión pura. De hecho, la razón de dicha hipótesis ha sido simplemente eliminar los complicados efectos de las tensiones de cortadura. En ingeniería, la fórmula de flexión es válida estén presentes o no fuerzas de cortadura. Por ello, emplearemos la ecuación (18) cuando estén presentes fuerzas de cortadura.

Consideremos una viga sometida a fuerzas de cortadura y momentos flectores.

Considérese un elemento dx de la viga. Supóngase que la sección es arbitraria. Se traza un plano horizontal cortando a la sección y paralelo al plano XZ. La separamos y nos quedamos con la parte superior.

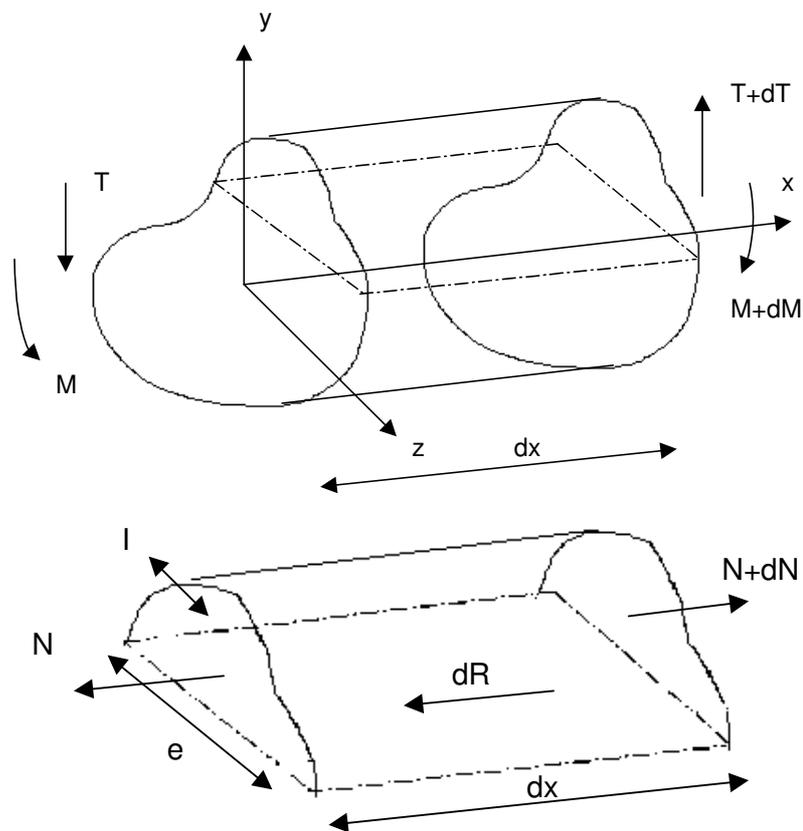


Figura 7 - Elemento de viga sometido a cortadura

Donde:

- T: esfuerzo cortante
- dR: esfuerzo tangencial horizontal, contenido en el plano horizontal del corte dado a la pieza
- N: tensiones debidas a la flexión
- I_z : momento de inercia de toda la sección
- S_1 : momento estático del area I
- y : distancia a la fibra neutra

Debida a la flexión se producen tensiones en cada punto dA , que darán una resultante N en una cara y otra en la cara opuesta $N+dN$. Para que el elemento esté en equilibrio es necesario una sollicitación dR en el plano horizontal que lo denotaremos como esfuerzo tangencial horizontal.

$$N - (N + dN) + dR = 0 \quad (28)$$

$$N + dN = \int_I \frac{(M + dM) \cdot y}{I_z} \cdot dA = \frac{(M + dM)}{I_z} \int_I y \cdot dA = \frac{(M + dM)}{I_z} \cdot S_1$$

$$N + dN = \frac{(M + dM)}{I_z} \cdot S_1 \quad (29)$$

$$N = \int_I \sigma \cdot dA = \int_I \frac{M \cdot y}{I_z} \cdot dA = \frac{M}{I_z} \int_I y \cdot dA = \frac{M}{I_z} \cdot S_1$$

$$N = \frac{M}{I_z} \cdot S_1 \quad (30)$$

Sustituyendo en la expresión (28) las expresiones (29) y (30), se obtiene:

$$dR = \frac{dM}{I_z} \cdot S_1 \quad (31)$$

De la ecuación de la elástica se deduce que $\frac{dM}{dx} = T$, por lo tanto:

$$dR = \frac{T \cdot S_1}{I_z} \cdot dx \quad (32)$$

La expresión (32) se conoce como la **fórmula del esfuerzo tangencial horizontal**.

Una vez obtenido dR, se pueden deducir las tensiones de cortadura asumiendo una distribución uniforme de las mismas en todo el ancho de la sección.

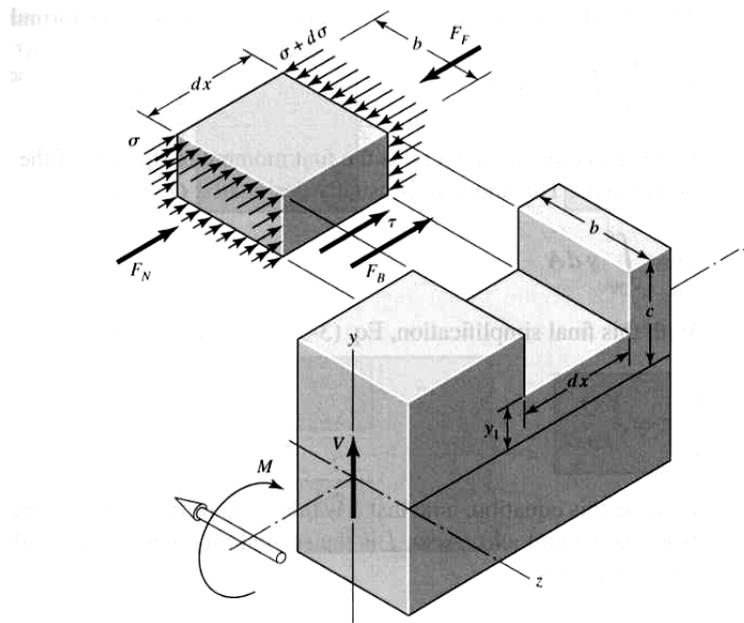


Figura 8 - Elemento de viga sometido a cortadura

$$\tau_{xy} = \frac{dR}{e \cdot dx} = \frac{T \cdot S_1 \cdot dx}{e \cdot dx \cdot I_z} = \frac{T \cdot S_1}{e \cdot I_z} \quad (33)$$

La hipótesis de tensión uniforme es sólo válida cuando se trata de piezas de sección delgada y abierta. Debe tenerse en cuenta que las tensiones de cortadura llevan la dirección de la forma exterior de la pieza.

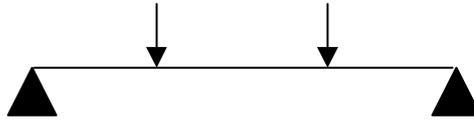
Ejemplo: cálculo de tensiones de cortadura en vigas de sección rectangular

Deformaciones debidas a esfuerzos cortantes

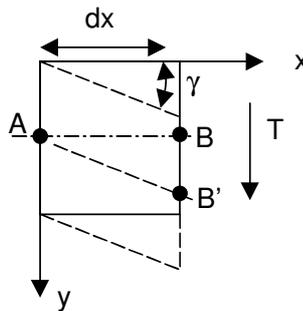
La flexión produce unas deformaciones llamadas flechas y se calculan por medio de la elástica.

Los esfuerzos cortantes producen también flechas. Para calcularlas se iguala el trabajo de deformación aportado a la viga por el esfuerzo cortante a la energía elástica en cortadura.

Considérese la siguiente viga cargada tal que:



Se toma una rebanada de la viga para estudiar el movimiento producido por el esfuerzo cortante.



El centro de gravedad se mueve de B a B' , y se designa dy dicho movimiento ($BB'=dy$). Así, se verifica:

$$\gamma = \frac{dy}{dx} \quad (34)$$

El trabajo realizado por el esfuerzo cortante contra la pieza es:

$$dW = \frac{1}{2} \cdot T \cdot dy = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \gamma \cdot dx$$

La energía de deformación por unidad de longitud es:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2}{G \cdot \mathfrak{K}}$$

Donde \mathfrak{K} es la sección equivalente en cortadura.

Así, la energía elástica absorbida por el elemento dx será:

$$dU = \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2}{G \cdot \mathfrak{K}} \cdot dx$$

El trabajo aportado debe ser igual a la energía elástica del esfuerzo cortante:

$$dW = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \gamma \cdot dx = dU = \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2}{G \cdot \mathfrak{K}} \cdot dx$$

Entonces, la ecuación de la elástica debido al esfuerzo cortante resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T}{\mathfrak{K} \cdot G} \quad (35)$$

A esta expresión debe añadirse una constante de integración C_1 :

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{T}{\mathfrak{K} \cdot G} + C_1} \quad (36)$$

La sección equivalente en cortadura es:

- Sección rectangular de área A: $\alpha = \frac{5}{6} A$
- Sección circular de área A: $\alpha = \frac{A}{1.185}$
- En general: $\alpha = \frac{\int I_z^2 \cdot dy}{\int \frac{S_I^2}{e} \cdot dy}$

1.5.6. TORSIÓN

Cualquier vector colineal con un eje geométrico de un elemento mecánico se denomina torsor.

Consideremos las siguientes hipótesis:

- Sobre el cilindro actúa un torsor puro (mismo momento torsor en cualquier sección), y las secciones transversales analizadas están lejos de cambio de sección y lejos de punto de aplicación de carga.
- Secciones transversales plana y paralelas antes de aplicación del torsor permanecen así después de torsión, y líneas de rectas permanecen rectas.
- Se cumple la ley de Hooke

Considérese un cilindro empotrado sometido a un momento torsor. Sobre un elemento dx a una distancia ρ del eje X, el torsor provoca una deformación angular γ tal que $\tau = G \cdot \gamma$.

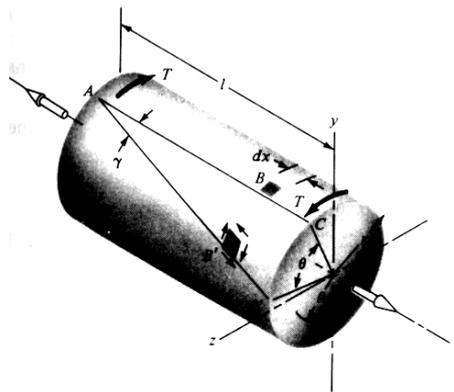


Figura 9 - Barra circular sometida a TORSOR

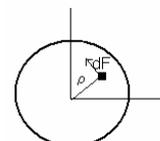
Por otro lado, asumiendo régimen elástico lineal, las deformaciones se asumen pequeñas, y por lo tanto:

$$\tan(\gamma) = \gamma = \frac{\rho \cdot \theta}{L} \quad (37)$$

Y sustituyendo esta expresión en la ecuación de elasticidad perfecta:

$$\tau = G \cdot \frac{\rho \cdot \theta}{L} \quad (38)$$

Tomando una sección cualquiera del cilindro:



$$dT = \rho \cdot dF = \rho \cdot \tau \cdot dA \quad (39)$$

E integrando,

$$T = \int_A \rho \cdot dF = \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA = \int_A \rho \cdot G \cdot \frac{\rho \cdot \theta}{L} \cdot dA = G \cdot \frac{\theta}{L} \int_A \rho^2 \cdot dA = G \cdot \frac{\theta}{L} \cdot I_p \quad (40)$$

donde I_p se define como el momento polar de inercia.

Y despejando el ángulo de giro:

$$\theta = \frac{T \cdot L}{G \cdot I_p} \quad (41)$$

Con lo que la expresión (38) se reescribe:

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{I_p} \quad (42)$$

Las conclusiones que se derivan son:

- El ángulo máximo de giro θ (Ecuación 41) se produce en el extremo del cilindro, y en la sección empotrada el ángulo de giro es nulo (definición de empotramiento).
- La tensión a cortadura máxima se produce en la periferia del cilindro, $\rho=R$, luego $\tau(R) = \frac{T \cdot R}{I_p}$. En el eje del cilindro, $\rho=0$, luego $\tau(0)=0$.

I_p se define como el momento polar de inercia:

- En secciones macizas: $I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$
- En secciones huecas: $I_p = \frac{\pi \cdot (D_{\text{ext}}^4 - D_{\text{int}}^4)}{32}$

En barras no circulares, el cálculo a torsión resulta difícil, por lo que se emplea el método de elementos finitos. La fórmula aproximada para calcular la tensión a cortadura máxima en una sección rectangular de ancho w y espesor t (se considera la dimensión más corta) se presenta a continuación:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{T}{w \cdot t} \cdot \left(3 + 1.8 \cdot \frac{t}{w} \right) \quad (43)$$



Cálculo del momento torsor

Elementos giratorios que transmiten potencia están sometidos a torsión.

$$\text{Potencia} = \text{Par} \cdot \omega_{\text{giro}}$$

$$H[\text{W}] = T[\text{N}\cdot\text{m}] \cdot n \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$H[\text{hp}] = \frac{2\pi \cdot T[\text{Lb}\cdot\text{in}] \cdot n[\text{rpm}]}{33.000 \cdot 12} = \frac{T[\text{Lb}\cdot\text{in}] \cdot n[\text{rpm}]}{63.000}$$

$$H[\text{hp}] = \frac{F[\text{Lb}] \cdot V[\text{ft}/\text{min}]}{33.000}$$

En las expresiones anteriores F es la fuerza aplicada en la periferia del elemento, y V es la velocidad periférica.

1.6. CÁLCULO DE DEFORMACIONES EN VIGAS

1.6.1. DESARROLLO DE LA ECUACIÓN DE LA ELÁSTICA. PROCEDIMIENTO DE INTEGRACIÓN.

Se parte de la ecuación de la elástica y mediante integración se obtienen los ángulos (dy/dx) y las flechas (y), expresión (25).

$$-\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Este método no es siempre posible o recomendable (por ejemplo, cuando la sección es variable o la expresión del momento flector en función de x es varía variable)

1.6.3. TEOREMAS DE MOHR PARA LAS DEFORMACIONES, FLECHAS Y ÁNGULOS EN PUNTOS CONCRETOS.

Primer teorema: Método de giros.

Puesto que:

$$-\frac{M}{EI} = \frac{d\phi}{dx} \rightarrow d\phi = -\frac{M}{EI} \cdot dx \quad (44)$$

Integrando la ecuación anterior entre dos puntos A y B,

$$\phi_B - \phi_A = \int_A^B -\frac{M}{EI} \cdot dx \quad (45)$$

La diferencia entre los ángulos de dos puntos o el giro total entre dos puntos es igual al área comprendida por la función entre estos dos puntos. Esto es el área que queda debajo de la curva del momento flector dividido por EI, entre los puntos A y B y con signo negativo.

Segundo teorema: Cálculo de flechas y deformaciones.

Mediante este teorema se calcula la flecha en el punto B en relación con la tangente en el punto A y denotaremos dicha flecha como $y_{B/A}$.

$$y_{B/A} = \bar{x}_B \cdot \int_A^B -\frac{M}{EI} \cdot dx \quad (46)$$

donde \bar{x}_B es la distancia desde el centro de gravedad del área de momentos entre A y B al punto B.

Un valor positivo de $y_{B/A}$ significa que es hacia abajo, y un valor negativo se mide desde la tangente en B hacia arriba.

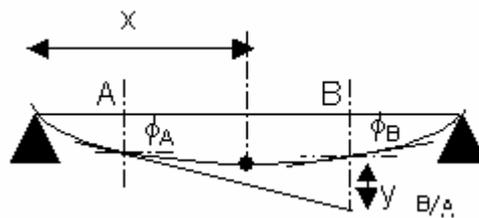


Figura 9 - Segundo Teorema de Mohr.

Ejemplos: viga empotrada con carga en extremo, viga empotrada con momento en extremo, viga biapoyada con momento en extremo.

1.6.4. MÉTODO DE CASTIGLIANO

Este método es útil para obtener las deformaciones o flechas debidas a la flexión y para resolver problemas hiperestáticos.

Establece que el movimiento en la dirección de un esfuerzo es igual a la derivada parcial de la energía elástica total respecto del esfuerzo.

$$\xi_F = \frac{\partial U}{\partial F} \quad (47)$$

La energía elástica es el resultado del trabajo originado por las sollicitaciones internas (tracción, compresión, flexión, torsión,...)

Energía elástica en tracción y compresión: $U = \int_s \frac{1}{2} \cdot \frac{P^2}{EA} \cdot dx$

$$dU = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{A} \cdot \frac{P}{EA} \cdot A \cdot dx \quad (48)$$

Energía elástica en flexión: $U = \int_s \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{EI} \cdot dx$

$$dU = \frac{1}{2} \cdot M \cdot d\phi = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \frac{M}{EI} \cdot dx \quad (49)$$

Energía elástica a cortadura: $U = \int_s \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{G \kappa} \cdot dx$

$$dU = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot d\gamma = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \frac{Q}{G \kappa} \cdot dx \quad (50)$$

Energía elástica en torsión: $U = \int_s \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2}{G I_p} \cdot dx$

$$dU = \frac{1}{2} \cdot T \cdot d\theta = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \frac{T}{G I_p} \cdot dx \quad (51)$$

Con todo, la ecuación generalizada de la energía elástica es:

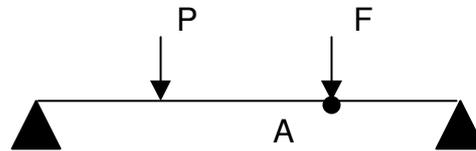
$$U = \int_s \frac{1}{2} \cdot \frac{P^2}{EA} \cdot dx + \int_s \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{EI} \cdot dx + \int_s \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{G \kappa} \cdot dx + \int_s \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2}{G I_p} \cdot dx \quad (52)$$

Y la ecuación generalizada de Castigliano resulta por lo tanto:

$$\xi_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{EA} \int_s P \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dx + \frac{1}{EI} \int_s M \cdot \frac{\partial M}{\partial y} \cdot dx + \frac{1}{G \kappa} \int_s Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} \cdot dx + \frac{1}{G I_p} \int_s T \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \cdot dx \quad (53)$$

Mediante este método se puede calcular también flechas o deformaciones en puntos de la viga donde no haya cargas aplicadas. Para ello, se coloca una fuerza ficticia en el punto cuya deformación se desea calcular.

⇒ Imaginemos que deseamos calcular la flecha en el punto A:



Se coloca una fuerza ficticia F en el punto A.

El momento flector total es el debido a las cargas reales más a la carga virtual F.

$$M = M_f^I + F \cdot M_f^{II} \quad (54)$$

donde:

- M_f^I : momento flector debido a las cargas reales
- M_f^{II} : momento flector debido a la carga unitaria ficticia

Así,

$$\xi_y = y_A = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{EI} \int_s M \cdot \frac{\partial M}{\partial F} \cdot dx \quad (55)$$

Luego:

$$\xi_y = y_A = \frac{1}{EI} \int_s (M_f^I + F \cdot M_f^{II}) \cdot \frac{\partial M}{\partial F} \cdot dx \quad (56)$$

Como $F=0$ y $\frac{\partial M}{\partial F} = M_f''$, asumiendo que I es constante en la sección:

$$\xi_y = y_A = \frac{1}{EI_s} \int M_f' \cdot M_f'' \cdot dx \quad (57)$$

Principio de Superposición

Cuando en una sección hay tracción, torsión,...el efecto total de las tensiones en esa sección es igual a la suma de los efectos individuales.

1.6.5. MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA

Trata de utilizar una similitud matemática entre una serie de fórmulas. Consiste en cargar una viga real con el diagrama de momentos flectores dividido por EI .

En esta viga conjugada los esfuerzos cortantes coinciden con los giros de la viga real, y los momentos flectores coinciden con las deformaciones o flechas de la viga real.

Ejemplo: viga biapoyada con momento en extremo.

1.7. PROBLEMAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS

Son aquellos en los que el número de reacciones o fuerzas exteriores es superior al de las ecuaciones que plantea la estática.

Para resolver este tipo de problemas existen dos métodos:

- Compatibilidad geométrica: consiste en plantear el desplazamiento compatible del sistema.
- Método de Castigliano: consiste en considerar una reacción redundante como una fuerza exterior y plantear el cálculo del grado de libertad restringido por dicha reacción redundante mediante Castigliano. Dicho grado de libertad será nulo, por lo que se obtiene una ecuación con una única incognita (la reacción redundante).

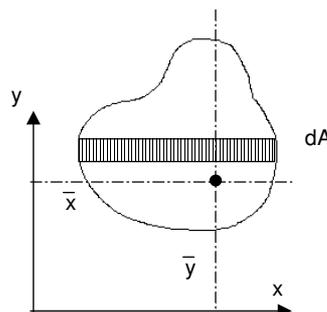
1.8. PROPIEDADES DE SECCIONES

1.8.1. CENTRO DE GRAVEDAD. MOMENTO ESTÁTICO DE PRIMER ORDEN.

El centro de gravedad de una sección cualquiera se define mediante las coordenadas \bar{x}, \bar{y} , de tal forma que se cumplen las siguientes condiciones.

$$\int_A (y - \bar{y}) dA = 0$$

$$\int_A (x - \bar{x}) dA = 0$$



Esto es el momento estático del área respecto al eje que pasa por el centro de gravedad.

De las expresiones anteriores se deduce:

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad (58) \quad \text{y} \quad \bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \quad (59)$$

Cuando el momento estático del área es cero, significa que el eje pasa por el centro de gravedad de la sección, ya que en las expresiones anteriores el área no es nula con lo que el valor de la ordenada debe ser cero.

Ejemplo: Cálculo del c.d.g. de una viga en T

1.8.2. MOMENTO DE INERCIA. MOMENTO ESTÁTICO DE SEGUNDO ORDEN.

Se define como la suma de los productos de las áreas por las distancias al cuadrado.

El momento de inercia respecto de un punto es:

$$I_o = \int_A r^2 \cdot dA \quad (60)$$

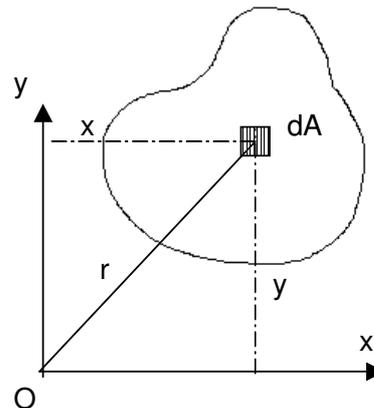
El momento de inercia respecto de un eje es:

$$I_{xx} = \int_A y^2 \cdot dA \quad (61)$$

$$I_{yy} = \int_A x^2 \cdot dA \quad (62)$$

Se verifica:

$$I_o = I_{xx} + I_{yy} \quad (63)$$



Para calcular el momento de inercia respecto de un eje que no pasa por el centro de gravedad, se suele plantear el **Teorema de Steiner**:

$$I = I_{cg} + A \cdot d^2 \quad (64)$$

Ejemplo: Cálculo del momento de inercia de viga en U.

1.9. ESTADO PLANO DE TENSIONES

Se estudia a continuación el caso en el que el elemento diferencial está sometido a tensiones paralelas a dos de los ejes (X e Y en este caso) como se representan en la Figura 10 .

En este caso, tal como se deduce de la figura, se cumple que:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (65)$$

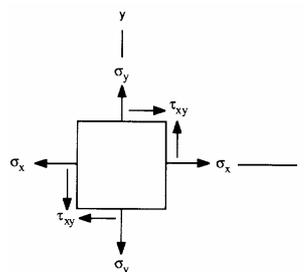


Figura 10 - Elemento en esfuerzo plano

y, por lo tanto: $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$.

Supóngase conocidos $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ y que se quiere calcular $(\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \tau_{x_1y_1})$. Los ejes (x_1, y_1) se obtienen a partir de (x, y) con un giro θ (en el sentido indicado en la Figura 11).

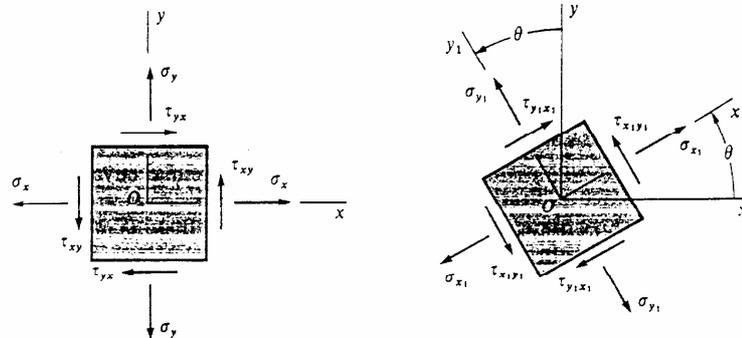


Figura 11 - Elementos en esfuerzo plano

Para relacionar $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ y $(\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \tau_{x_1y_1})$ es útil acudir a la Figura 12, que permite establecer los esfuerzos que actúan sobre una cuña en esfuerzo plano.

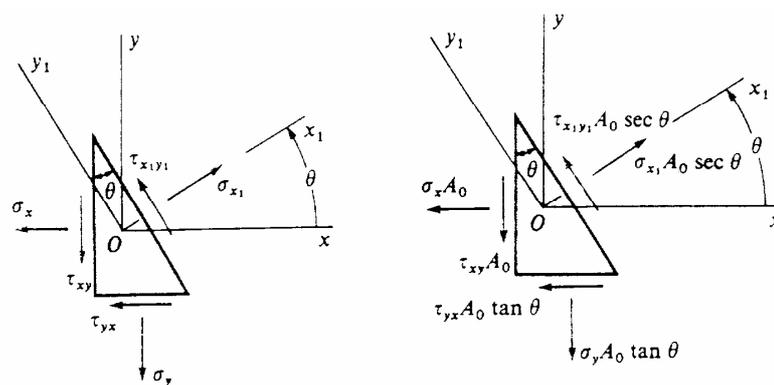


Figura 12 - Elemento en forma de cuña en esfuerzo plano (esfuerzos y fuerzas)

Al analizar el equilibrio de este elemento se deducen las siguientes relaciones:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (66)$$

$$\sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (67)$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (68)$$

donde se cumple que $\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y$

El caso más general de esfuerzo plano se reduce a estados de esfuerzos más simples bajo condiciones especiales tal como se esquematiza en la Figura 13.

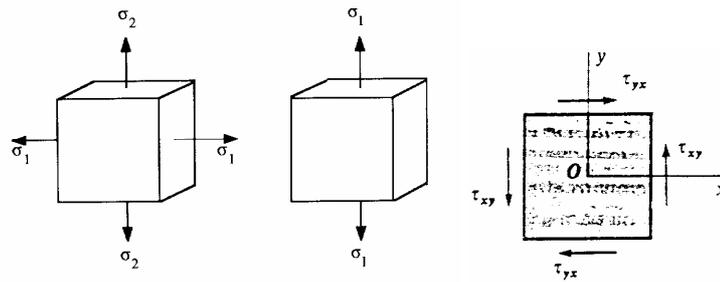


Figura 13 - Casos particulares de tensión plana (biaxial, uniaxial, cortante puro)

1.9.1. ESFUERZOS PRINCIPALES Y ESFUERZOS CORTANTES MÁXIMOS

Suponiendo un estado plano de tensiones y utilizando por tanto las expresiones anteriores, se quiere calcular el valor σ_{x_1} máximo. Puesto que:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (69)$$

el máximo se obtendrá derivando la expresión anterior:

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{d\theta} = 0 = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta \quad (70)$$

despejando se obtiene el ángulo θ_p que cumple la ecuación (71)

$$\boxed{\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}} \quad (71)$$

Habrà dos valores distintos de θ_p que cumplen la ecuación (71) - y que difieren en 90° -. A los valores de los esfuerzos que corresponden a los ejes definidos por θ_p los llamaremos esfuerzos (o tensiones) principales y tendrán lugar, por lo tanto, en planos perpendiculares entre sí. Los valores de esas tensiones principales σ_1 y σ_2 se pueden obtener sustituyendo (θ_p) y $(\theta_p + 90^\circ)$ respectivamente en la ecuación (69)

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (72)$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (73)$$

Si se considera ahora la ecuación (68) que proporciona el esfuerzo cortante:

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta_p + \tau_{xy} \cos 2\theta_p \quad (74)$$

de donde se puede deducir que, sustituyendo el valor de $\operatorname{tg}(2\theta_p)$ que proporciona la ecuación (71) en la ecuación (74), $\tau_{x_1y_1} = 0$. Por tanto, los esfuerzos cortantes son nulos sobre los planos principales.

De la misma forma que se ha hecho para σ_{x_1} , calcularemos ahora el valor de θ para el que $\tau_{x_1y_1}$ es máximo. Recordese que:

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (75)$$

Derivando e igualando a cero la derivada,

$$\frac{d\tau_{x_1y_1}}{d\theta} = 0 = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + 2\tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \quad (76)$$

de donde despejando se obtiene el ángulo θ_s que cumple la ecuación (77)

$$\boxed{\operatorname{tg}(2\theta_s) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}} \quad (77)$$

La ecuación (77) proporciona también dos valores de θ_s que difieren 90° . Comparando θ_s con θ_p se obtiene la siguiente relación

$$\boxed{\operatorname{tg}(2\theta_s) = \frac{-1}{\operatorname{tg}(2\theta_p)} \Rightarrow \theta_s = \theta_p \pm 45^\circ} \quad (78)$$

De la ecuación (78) se deduce que los planos de esfuerzo cortante máximo están orientados a 45° de los planos principales.

Si ahora se calcula τ_{\max} para $\theta = \theta_s$ a partir de las ecuaciones (77) y (74), se obtiene la siguiente expresión

$$\boxed{\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (79)$$

y recordando las expresiones de σ_1 y σ_2 , (72) y (73):

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}} \quad (80)$$

1.9.2. CÍRCULO DE MOHR

Partiendo de las ecuaciones ya conocidas en las que σ_{x_1} y $\tau_{x_1y_1}$ se obtienen en función de σ_x , σ_y , τ_{xy} :

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Las dos ecuaciones anteriores se pueden reordenar, elevando al cuadrado y sumando para obtener una expresión en la que los distintos valores (σ_{x_1} , $\tau_{x_1y_1}$), cuando varía θ , forman un círculo que en unos ejes (σ_x , τ_{xy}):

- tiene por centro el punto $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$
- tiene un radio de valor igual a $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Luego conocidos $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ es útil una representación conocida por círculo de Mohr (Figura 14) en el que podemos reconocer las direcciones principales, las tensiones principales y las tensiones en cualquier otro plano de una forma gráfica y sencilla.

La convención de signos que se adopta para la construcción del círculo de Mohr es la siguiente: esfuerzos cortantes positivos son aquellos que estén de acuerdo al sentido de giro de las manecillas del reloj. Esto significa que en dicha figura, τ_{yx} es positivo y τ_{xy} negativo. Los esfuerzos normales siguen el criterio de la convención clásica.

La construcción del círculo de Mohr se lleva a cabo teniendo en cuenta que:

- para $\theta = 0 \Rightarrow \sigma_{x1} = \sigma_x, \tau_{x1y1} = \tau_{xy}$
- para $\theta = 90^\circ \Rightarrow \sigma_{y1} = \sigma_y, \tau_{x1y1} = -\tau_{xy}$

En este círculo se representan los esfuerzos normales en abscisas y los esfuerzos cortantes en ordenadas.

Los esfuerzos normales positivos (tracción) se marcan a la derecha del origen O, y los negativos (compresión) a la izquierda del origen O.

Los esfuerzos cortantes positivos (sentido del reloj) se trazan en ordenadas positivas y los esfuerzos cortantes negativos (sentido contrario del reloj) se trazan en ordenadas negativas.

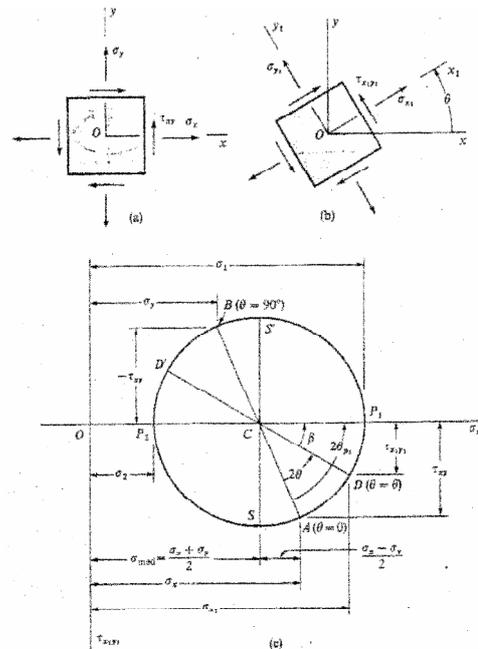


Figura 14 - Círculo de Mohr para esfuerzo plano

Es conveniente considerar los distintos estados tensionales posibles en el caso de tensión plana:

- Caso 1: $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$. La máxima tensión de cortadura es $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$
- Caso 2: $0 > \sigma_1 > \sigma_2$. La máxima tensión de cortadura es $\tau_{\max} = \frac{\sigma_2}{2}$
- Caso 3: $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$. La máxima tensión de cortadura es $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

La utilidad del desarrollo anterior puede verse en el ejemplo que sigue. Supongamos que fuéramos capaces de determinar las deformaciones unitarias con algún elemento de medida y quisiéramos determinar las *tensiones* a las que está sometido el material en un punto determinado, así como las *direcciones principales* y las *tensiones en cualquier otra dirección*. La pregunta es ¿cuántos elementos de medida harían falta?

Supóngase que se colocan tres elementos (A, B, C) alrededor de un punto O tal y como se indica en la Figura 15 y según unas referencias (x, y) que elegimos arbitrariamente.

Si ahora se toman los ejes (x_1, y_1) , utilizando las ecuaciones de transformación para deformación plana particularizadas para $\theta = 45^\circ$:

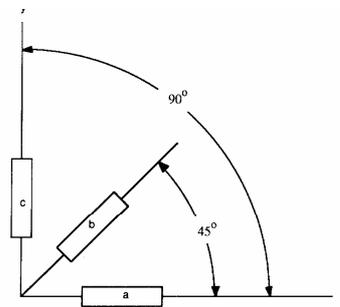


Figura 15 - Situación de los ejes de referencia ($\epsilon_x = \epsilon_a$ y $\epsilon_y = \epsilon_c$)

De igual forma que se ha obtenido el círculo de Mohr para tensiones se puede realizar el desarrollo análogo para deformaciones. Así, se puede plantear para la deformación a 45° la siguiente expresión:

$$\epsilon_{x_1} = \epsilon_b = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} + \frac{\epsilon_a - \epsilon_c}{2} \cos 90^\circ + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 90^\circ \quad (81)$$

despejando se obtiene:

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c \quad (82)$$

De esta manera, obtenidos ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} se pueden hallar σ_x , σ_y , τ_{xy} y, posteriormente - con la ayuda del círculo de Mohr - las tensiones principales, las direcciones principales y las tensiones según cualquier otro eje.

Obsérvese que la utilización de las relaciones del círculo de Mohr han sido necesarias para calcular la deformación angular. En la realidad, los elementos de medida que se emplean para medir deformaciones son galgas extensométricas pegadas en la superficie de la pieza cuya deformación puntual se quiera medir. En estos elementos, la variación relativa de resistencia que se produce en un hilo conductor cuando éste se deforma es proporcional mediante el factor de galga a la deformación. Estos elementos sólo pueden medir deformaciones lineales, no angulares. De ahí la necesidad del empleo de las relaciones del Círculo de Mohr para caracterizar completamente el estado de tensiones-deformaciones del elemento.

1.10. ESTADO DE ESFUERZO TRIAXIAL

Es la generalización de lo visto para estado de tensiones biaxial. Los esfuerzos principales se obtienen al calcular las tres raíces de la ecuación cúbica:

$$\begin{aligned} &\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \cdot \sigma^2 + \\ &(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) \cdot \sigma - \\ &(\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{yx}^2) = 0 \end{aligned}$$

Al trazar los círculos de Mohr para esfuerzo triaxial se ordenan los esfuerzos principales tal que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Las coordenadas de esfuerzo σ_N , τ_N para un plano de localización arbitraria estarán dentro del área sombreada de la figura siguiente:

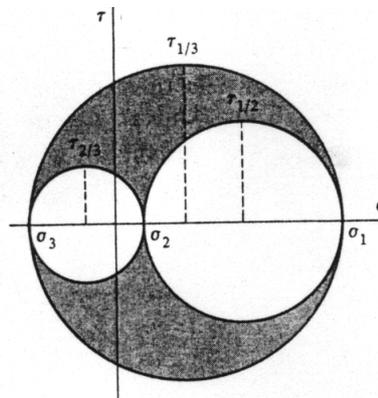


Figura 16 - Círculo de Mohr 3D.

Los esfuerzos cortantes principales son:

$$\tau_{1/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (83)$$

$$\tau_{2/3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad (84)$$

$$\tau_{1/3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (85)$$

Así, para $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, el esfuerzo cortante máximo es $\tau_{1/3}$.

1.11 ESFUERZOS OCTAÉDRICOS

Considérese un elemento de esfuerzo que tienen unos esfuerzos principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Se corta dicho elemento por un plano que forme ángulos iguales con cada uno de los tres esfuerzos principales. Dicho plano se denomina plano octaédrico. Las resultantes σ, τ en dicho plano se denominan esfuerzo normal octaédrico y esfuerzo cortante octaédrico.

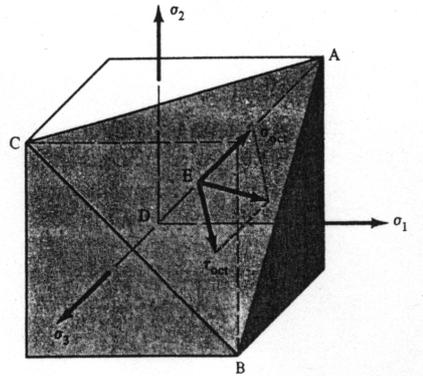


Figura 17 - Esfuerzos Octaédricos

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{2 \cdot \sqrt{(\tau_{1/2}^2 + \tau_{2/3}^2 + \tau_{1/3}^2)}}{3} = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}}{3} \quad (86)$$

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{3} \quad (87)$$

1.12. RELACIÓN TENSION DEFORMACIÓN

1.12.1. TENSION PLANA

Supóngase que existe una relación lineal entre la deformación de un material y la tensión a la que está sometido. La expresión más sencilla es la Ley de Hooke que relaciona tensión y deformación mediante el módulo de Young (E).

Si consideramos el caso del esfuerzo plano (Figura 18), la deformación unitaria según la dirección $x - \varepsilon_x$ - es provocada por σ_x - en una cantidad σ_x/E - y por σ_y - en una cantidad $-\nu\sigma_y/E$ (efecto Poisson) - luego:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (88)$$

y de igual forma pueden hallarse expresiones como (88) para ε_y y ε_z .

A su vez, el esfuerzo cortante ocasiona una distorsión del elemento diferencial, en forma de deformación angular γ_{xy} relacionada con τ_{xy} a través del módulo de cizalladura G. Luego las relaciones tensión/deformación pueden expresarse - en el caso de tensión plana -:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (89)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (90)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (91)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (92)$$

o bien;

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad (93)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad (94)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (95)$$

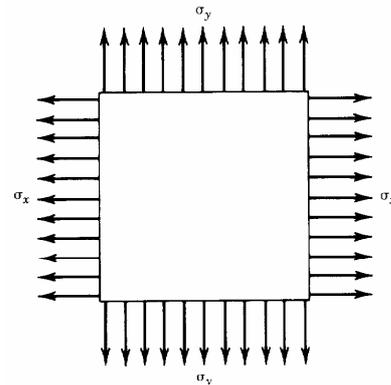


Figura18 - Esfuerzo plano, biaxial

1.12.2. GENERALIZACIÓN

Tipo de esfuerzo	Deformaciones principales	Esfuerzos principales
Uniaxial	$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$ $\varepsilon_2 = -\nu \cdot \varepsilon_1$ $\varepsilon_3 = -\nu \cdot \varepsilon_1$	$\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = 0$
Biaxial	$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_2}{E}$ $\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_1}{E}$ $\varepsilon_3 = -\nu \cdot \frac{\sigma_1}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_2}{E}$	$\sigma_1 = \frac{E \cdot (\varepsilon_1 + \nu \cdot \varepsilon_2)}{1 - \nu^2}$ $\sigma_2 = \frac{E \cdot (\varepsilon_2 + \nu \cdot \varepsilon_1)}{1 - \nu^2}$ $\sigma_3 = 0$
Triaxial	$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_2}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_3}{E}$ $\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_1}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_3}{E}$ $\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_1}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_2}{E}$	$\sigma_1 = \frac{E \cdot \varepsilon_1 \cdot (1 - \nu) + \nu \cdot E \cdot (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{1 - \nu - 2\nu^2}$ $\sigma_2 = \frac{E \cdot \varepsilon_2 \cdot (1 - \nu) + \nu \cdot E \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{1 - \nu - 2\nu^2}$ $\sigma_3 = \frac{E \cdot \varepsilon_3 \cdot (1 - \nu) + \nu \cdot E \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{1 - \nu - 2\nu^2}$