2.1.1 El análisis de Fourier

A principios del siglo XIX, el matemático francés Jean-Baptiste Fourier probó que cualquier función periódica de comportamiento razonable, g(t) con un periodo T, se puede construir sumando una cantidad (posiblemente infinita) de senos y cosenos:

Observaciones : Estimado Alumno : no debe tratar de entender necesariamente el significado de estas ecuaciones, sólo se las presenta para que Ud. vea el uso de las funciones seno y coseno vistas en matemática de cómo pueden representar ondas electromagnéticas. Observe también el argumento de las funciones el valor de n, Pi, f y t. Si no las entiende a la fecha pregunte en clase al docente. Recuerde el significado de an y bn de cómo afecta a la funciones senoidales según lo visto en la práctica de gráfica de funciones.

$$g(t) = \frac{1}{2}c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(2\pi nft) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(2\pi nft)$$

donde f = 1/T es la frecuencia fundamental, an y bn son las amplitudes de seno y coseno de los n-ésimos (términos) armónicos y c es una constante. Tal descomposición se conoce como serie de Fourier. A partir de ella, es posible reconstruir la función, es decir, si se conoce el periodo T y se dan las amplitudes, la función original del tiempo puede encontrarse realizando las sumas que se muestran en la ecuación (2-1).

Una señal de datos que tenga una duración finita (la cual todas poseen) se puede manejar con sólo imaginar que el patrón se repite una y otra vez por siempre (es decir, el intervalo de T a 2T es el mismo que de 0 a T, etcétera). Las amplitudes an se pueden calcular para cualquier g(t) dada multiplicando ambos lados de la ecuación (2-1) por sen(2πkft) y después integrando de 0 a T.

Puesto que

$$\int_0^T \operatorname{sen}(2\pi kft)\operatorname{sen}(2\pi nft)\,dt = \begin{cases} 0 \text{ para } k \neq n \\ T/2 \text{ para } k = n \end{cases}$$

sólo un término de la sumatoria perdura: an. La sumatoria de bn desaparece por completo. De manera similar, al multiplicar la ecuación (2-1) por cos(2πkft) e integrando entre 0 y T, podemos derivar bn. Con sólo integrar ambos lados de la ecuación como está, podemos encontrar c. Los resultados de realizar estas operaciones son los siguientes:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\operatorname{sen}(2\pi nft)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\cos(2\pi nft)\,dt \qquad c = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\,dt$$

2.1.2 Señales de ancho de banda limitado

Para ver cómo se relaciona todo esto con la comunicación de datos, consideremos un ejemplo específico: la transmisión del carácter “b” ASCII codificado en un byte de 8 bits. El patrón de bits que se va a transmitir es 01100010. La parte izquierda de la figura 2-1(a) muestra la salida de voltaje que produce la computadora transmisora. El análisis de Fourier de la señal produce los coeficientes:

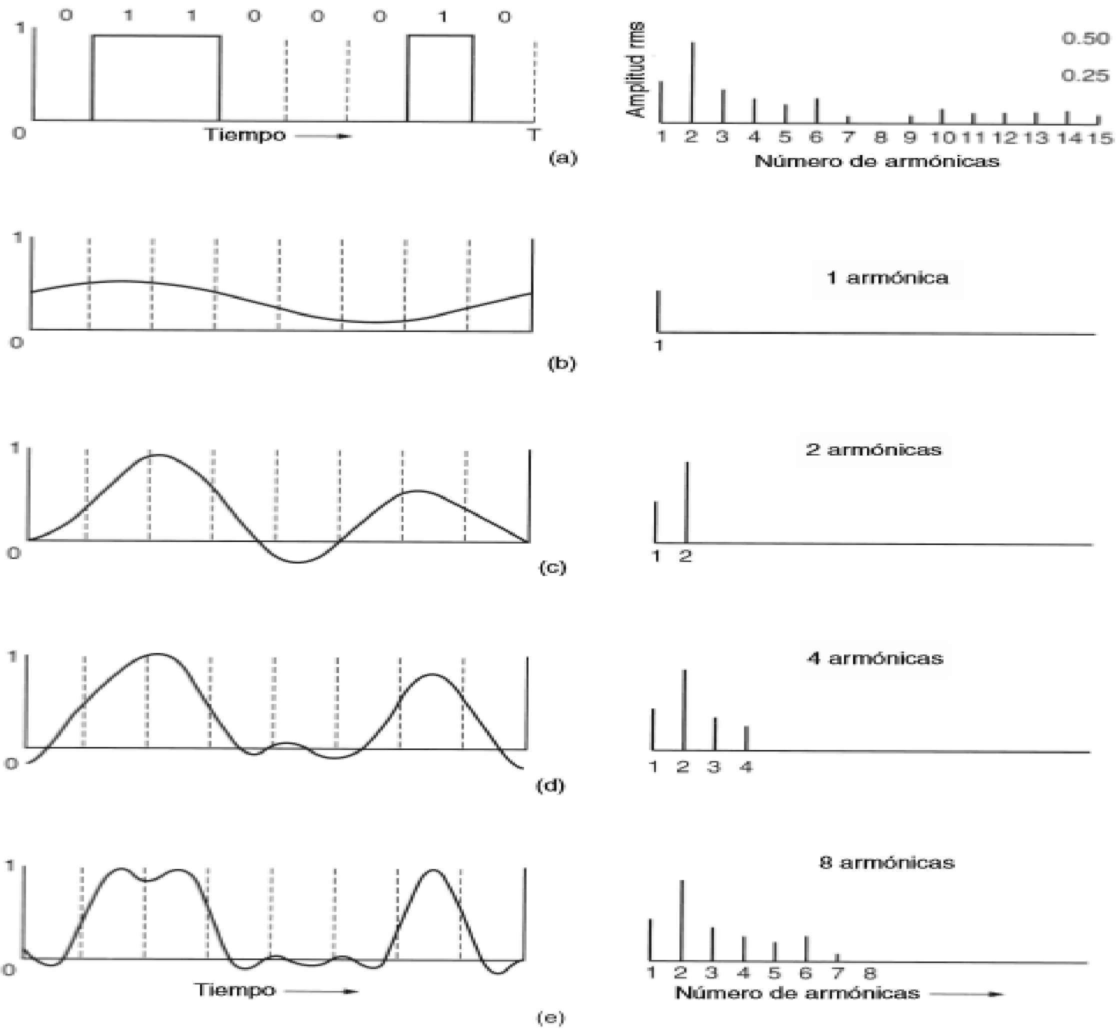
$$a_n = \frac{1}{\pi n}\left[\cos(\pi n/4) - \cos(3\pi n/4) + \cos(6\pi n/4) - \cos(7\pi n/4)\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n}\left[\operatorname{sen}(3\pi n/4) - \operatorname{sen}(\pi n/4) + \operatorname{sen}(7\pi n/4) - \operatorname{sen}(6\pi n/4)\right]$$

$$c = 3/4$$

Figura 2-1. (a) Una señal binaria y sus amplitudes de raíz cuadrada media de Fourier. (b)-(e) Aproximaciones sucesivas a la señal original.

EC. 2.1 LA BASE TEÓRICA DE LA COMUNICACIÓN DE DATOS



Nota : Para entender el siguiente párrafo y el gráfico de arriba repase y concepto de *armónicas* expuesto en clase.

En el lado derecho de la figura 2-1(a) se muestran las amplitudes de raíz cuadrada media, a2 n + b2 n, para los primeros términos. Estos valores son importantes porque sus cuadrados son proporcionales a la energía transmitida en la frecuencia correspondiente. Ninguna instalación transmisora puede transmitir señales sin perder cierta potencia en el proceso. Si todos los componentes de Fourier disminuyeran en la misma proporción, la señal resultante se reduciría en amplitud, pero no se distorsionaría [es decir, tendría la misma forma cuadrada que tiene en la figura 2-1(a)]. Desgraciadamente, todas las instalaciones de transmisión disminuyen los distintos componentes de Fourier en diferente grado, lo que provoca distorsión. Por lo general, las amplitudes se transmiten sin ninguna disminución desde 0 hasta cierta frecuencia fc [medida en ciclos/seg o Hertz (Hz)], y todas las frecuencias que se encuentren por arriba de esta frecuencia de corte serán atenuadas. El rango de frecuencias que se transmiten sin atenuarse con fuerza se conoce como **ancho de banda**. **En la práctica, el corte en realidad no es abrupto, por lo que con frecuencia el ancho de banda ofrecido va desde 0 hasta la frecuencia en la que el valor de la amplitud es atenuado a la mitad de su valor original.**

El ancho de banda es una propiedad física del medio de transmisión y por lo general depende de la construcción, grosor y longitud de dicho medio. En algunos casos, se introduce un filtro en el circuito para limitar la cantidad de ancho de banda disponible para cada cliente. Por ejemplo, un cable de teléfono podría tener un ancho de banda de 1 MHz para distancias cortas, pero las compañías telefónicas agregan un filtro que restringe a cada cliente a aproximadamente 3100 Hz. Este ancho de banda es adecuado para el lenguaje inteligible y mejora la eficiencia del sistema al limitar a los usuarios en el uso de los recursos.

Ahora consideremos cómo luciría la señal de la figura 2-1(a) si el ancho de banda fuera tan lento que sólo las frecuencias más bajas se transmitieran [es decir, si la función fuera aproximada por los primeros términos de la ecuación 2-1(a)]. La figura 2-1(b) muestra la señal que resulta de un canal que permite que sólo pase la primera armónica (la fundamental, f). De manera similar, la figura 2-1(c)-(e) muestra el espectro y las funciones reconstruidas de canales de ancho de banda más grande. Dada una tasa de bits de b bits/seg, el tiempo requerido para enviar 8 bits (por ejemplo) 1 bit a la vez es 8/b seg, por lo que la frecuencia de la primera armónica es b/8 Hz. Una línea telefónica normal, llamada con frecuencia línea con calidad de voz, tiene una frecuencia de corte introducida de manera artificial arriba de 3000 Hz. Esta restricción significa que el número de armónicas más altas que pasan es de aproximadamente 3000/(b/8) o 24,000/b (el corte no es abrupto). Para algunas tasas de datos, los números resultan como se muestra en la figura 2-2. A partir de estos números, queda claro que tratar de transmitir a 9600 bps por una línea telefónica transformará la figura 2-1(a) en algo similar a lo que se muestra en la figura 2-1(c), lo que dificulta la recepción precisa del flujo de bits binarios original. Debería ser obvio que a tasas de datos mucho mayores que 38.4 kbps, no hay la menor esperanza para las señales binarias, aun si la transmisión se encuentra completamente libre de ruidos. En otras palabras, limitar el ancho de banda limita la tasa de datos, incluso en canales perfectos. Sin embargo, existen esquemas de codificación refinados que utilizan diferentes niveles de voltaje y pueden alcanzar tasas de datos mayores. Este tema lo trataremos con mayor detalle más adelante.

Bps	T (mseg)	Primera armónica (Hz)	# de armónicas enviadas
300	26.67	37.5	80
600	13.33	75	40
1200	6.67	150	20
2400	3.33	300	10
4800	1.67	600	5
9600	0.83	1200	2
19200	0.42	2400	1
38400	0.21	4800	0

Figura 2-2. Relación entre tasa de datos y armónicas.

Hay mucha confusión en cuanto al ancho de banda, ya que tiene distintos significados para los ingenieros eléctricos y para los científicos de computadoras. Para los primeros**, el ancho de banda (analógico**) es una cantidad que se mide en Hz. Para los segundos **el ancho de banda (digital)** es la tasa de datos máxima de un canal, una cantidad que se mide en bits/seg. Esa tasa de datos es el resultado final de usar el ancho de banda analógico de un canal físico para la transmisión digital, y ambos están relacionados, como veremos a continuación.